Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉTERMINATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES ÉLASTIQUES

Autor: Zack, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18038

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

mais toutes sont examinées et complétées convenablement par les objets de la nouvelle colonne, ainsi que celle qui peut-être manquait (celle qui peut-être manquait ne peut être la $\alpha_{1\mu}\alpha_{2\mu}\ldots\alpha_{\nu\mu}$, car celle-ci est en évidence). Nous aurons donc, en général

$$O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu} = \mu^{\nu} .$$

Et puisque cette formule est vraie pour les valeurs $\mu = 3$, $\nu = 2$ et que si elle est vraie pour une valeur de μ et ν, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité, il suit qu'elle est générale.

Athènes, 1915.

SUR LA DÉTERMINATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES ÉLASTIQUES

PAR

M. Zack (Zurich).

L'emploi des coordonnées que M. Cesàro a introduites en Géométrie, dans l'étude des questions se rapportant à la résistance des matériaux présenterait, à mon avis, un grand avantage. Cependant, cette tentative, à ce que je sache, n'a jamais été faite jusqu'ici. Je me propose donc dans les lignes qui suivent de montrer sur un exemple particulier, celui des lames élastiques, comment l'emploi de ces coordonnées simplifie l'étude de ce cas et permet d'obtenir des solutions aussi élégantes qu'utiles dans la pratique.

Pour déterminer un point P d'une courbe C′ correspondant d'après une relation quelconque à un point A d'une courbe C, M. Cesàro se sert d'un *système* rectangulaire *mobile,* l'axe des x étant la tangente et l'axe des y étant la *normale* de C en A. Soient x et y, coordonnées de P, des fonctions de l'arc s de C, A′ le point de C infiniment voisin de A, P′ le point de C′ correspondant à A′, $x + \delta x$ et $y + \delta y$

les coordonnées de P′ dans le système de A, $x + dx$ et $y + dy$ les coordonnées de P′ dans le système de A′, et, enfin, Δx et Δy les coordonnées de A′ dans le système A.

On aura (fig. 1)

$$x + \delta x = \Delta x + (x + dx) \cos \Delta\varphi - (y + dy) \sin \Delta\varphi \ ,$$
$$y + \delta y = \Delta y + (x + dx) \sin \Delta\varphi + (y + dy) \cos \Delta\varphi \ ,$$

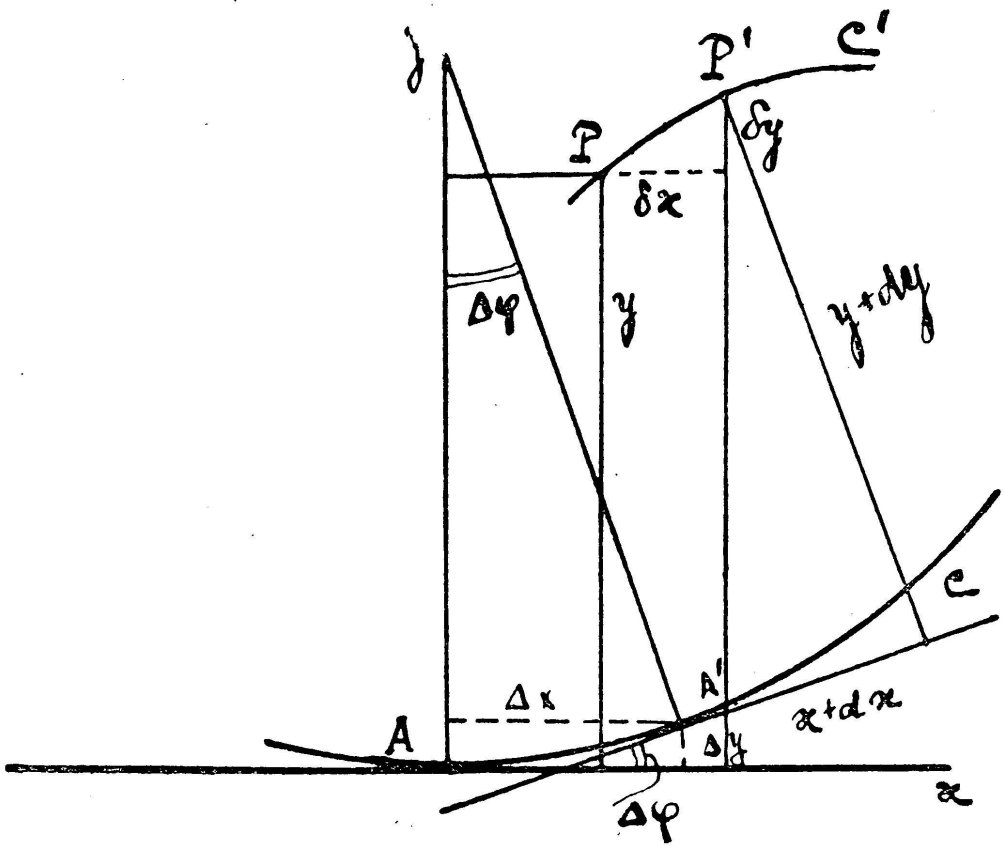

Fig. 1.

d'où, en divisant ces expressions par $ds (= \Delta s)$, en remarquant que $\lim \frac{\Delta x}{\Delta s} = 1$ et $\lim \frac{\Delta y}{\Delta s} = 0$ et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur on obtient les formules fondamentales de M. Cesàro,

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1 \ , \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} \tag{1}$$

où ρ est le rayon de courbure de C en A.

Rappelons encore brièvement quelques propriétés des vecteurs parallèles. Considérons un système de vecteurs parallèles, positifs ou négatifs, mais généralement non nuls, distribués le long d'une courbe plane OA suivant une cer-

taine loi et dirigés normalement à ce plan. Soit d'autre part μ_k un coefficient attaché au vecteur relatif au point k et déterminant sa grandeur et son sens. *Pour toute portion de la courbe* OA *telle que* OM *l'ensemble des vecteurs peut être remplacé par un vecteur unique appliqué au centre de gravité de l'ensemble des masses* μ_k *correspondant à la portion considérée.*

On sait que la variation de l'angle de courbure en k de la fibre neutre est donnée par l'expression $\Delta d\omega = \frac{M_k}{EI_k} ds$, où M_k est le moment de flexion et I_k le moment d'inertie de la section k. Or, $\Delta d\omega$ est en même temps la rotation de l'élément considéré par rapport à l'élément qui le précède, et peut être représenté par un vecteur normal au plan de OA et de grandeur $\frac{M_k}{EI_k} ds = \mu_k ds$. Pour avoir le siège de la rotation relative de M par rapport à O, il suffira de composer tous les vecteurs μds correspondant à l'arc OM, c'est-à-dire trouver le centre de gravité de l'arc OM de densité μ et y appliquer le vecteur résultant de grandeur $\sigma = \Sigma \mu_k ds$ ou à la limite $\sigma = \int_0^s \mu ds$. On obtient ainsi pour chaque point M un vecteur résultant de grandeur σ appliqué au centre de gravité de l'arc OM de densité μ ou de masse σ. Ainsi, à la courbe OA correspond point par point une courbe (G), lieu des centres de gravité des arcs OM de masse σ. *La connaissance de cette courbe* (G) *permet en même temps d'obtenir la ligne élastique de la lame* OA, *le déplacement d'un point* M *par rapport à* O *étant une rotation* σ *autour de* G. *Le point* M *décrit donc un arc de cercle de centre* G *et de longueur* $\sigma.\overline{GM}$.

Fig. 2.

Or, si on prend pour axes de coordonnées le axes de M. Cesàro, c'est-à-dire la tangente et la normale de OA en M, les équations qui déterminent la courbe (G) s'écriront

$$\frac{d\sigma x}{ds} = \frac{\sigma y}{\rho} - \sigma , \qquad \frac{d\sigma y}{ds} = -\frac{\sigma x}{\rho} , \tag{2}$$

où x et y sont les coordonnées de (G) par rapport aux axes choisis et ρ — le rayon de courbure de OA en M[1].

Supposons que la rotation est très petite (ce qui arrive généralement), de sorte que son carré est négligeable devant σ. On peut alors confondre l'arc $\sigma.\overline{GM}$ avec sa tangente et les équations de la ligne élastique s'obtiendront en posant dans (2) $\sigma y = \xi$ et $\sigma x = -\eta$, ξ et η étant les coordonnées du point de la ligne élastique correspondant à M, dans le système d'axes choisi. On aura

$$\frac{d\eta}{ds} = \sigma - \frac{\xi}{\rho}, \qquad \frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\rho}. \tag{3}$$

Si σ et s sont données en fonction de φ, les équations (3) s'écriront

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sigma\frac{ds}{d\varphi} - \xi, \qquad \frac{d\xi}{d\varphi} = \eta. \tag{3'}$$

Dans le cas particulier où OA est un arc de cercle, $s = a\varphi$, les équations (3') deviennent

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sigma a - \xi, \qquad \frac{d\xi}{d\varphi} = \eta. \tag{3''}$$

Remarquons qu'il suffit de connaître *une* courbe (E) *quelconque* satisfaisant aux équations (3) et un seul point de la ligne élastique correspondant à un point déterminé de la

---

[1] Les équations (2) s'obtiennent de la façon suivante : Les formules (1) deviennent dans le cas de la figure 3 :

$$\frac{\delta u}{ds_1} = \frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{v}{\rho} + 1, \qquad \frac{\delta v}{ds_1} = \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{u}{\rho}. \tag{a}$$

Pour que u et v définissent un point et un seul quel que soit s_1, il faut que δu et δv soient nuls, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{v}{\rho} - 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial s_1} = -\frac{u}{\rho}. \tag{b}$$

Posons

$$\sigma x = \int_0^{s_2} \mu u\, ds_2 \quad \text{et} \quad \sigma y = \int_0^{s_2} \mu v\, ds_2. \tag{c}$$

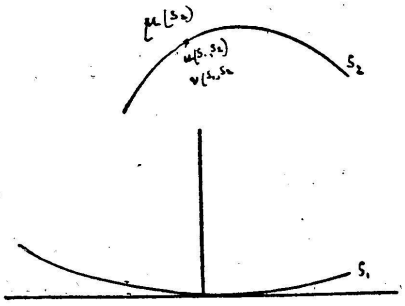

Fig. 3.

En multipliant (b) par μds_2, en intégrant et en tenant compte de (c), on obtient les équations (2). Le raisonnement subsiste si s_1 se confond avec s_2.

courbe (E) pour pouvoir construire immédiatement la ligne élastique, car *le segment de droite reliant deux points correspondants de deux courbes* (E) *est constant en grandeur et fixe en direction.* On le vérifie facilement en posant $\xi_1 = \xi_2 + R\cos\theta$ et $\eta_1 = \eta_2 + R\sin\theta$; des équations (3) il vient $R = \text{const.}$ et $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}$, ce qui démontre la proposition.

Les équations (3) *permettent de résoudre différents problèmes relatifs à la ligne élastique. On peut, par exemple, s'imposer certaines conditions pour le déplacement* (ξ, η) *du point* M *et déterminer* I *en fonction de* s *ou de* φ, *pour une forme donnée de la fibre neutre* $s = f(\rho)$ *ou* $s = f(\varphi)$ *et un moment de flexion* $M = \psi(s)$ *ou* $M = \psi(\varphi)$ *donné, de façon que ces conditions soient satisfaites.* Inversement, *on peut déterminer la forme de la fibre neutre pour un* I *et un* M *donnés de façon que le déplacement d'un point* M *satisfasse à une certaine condition. On peut, enfin, pour une forme donnée de la fibre neutre et un* I *et un* M *donnés, trouver le déplacement d'un point* M.

Considérons, par exemple, le cas d'une lame droite. Les équations (3) deviennent dans ce cas :

$$\frac{d\eta}{ds} = \sigma\,, \qquad \frac{d\xi}{ds} = 0$$

et la première de ces équations n'est autre que l'équation bien connue $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$. Si le point O de la lame est fixe, $\xi = 0$ et le déplacement est normal à la fibre neutre.

Appliquons à ξ et η les formules (1). On obtient en tenant compte de (3)

$$\frac{\delta\xi}{ds} = 1\,, \qquad \frac{\delta\eta}{ds} = \sigma \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta\eta}{\delta\xi} = \sigma\,. \tag{4}$$

Les tangentes à la fibre neutre et à la ligne élastique se coupent sous un angle α *tel que* $\operatorname{tg}\alpha = \sigma$ *ou, puisque* σ *est supposé très petit,* $\alpha = \sigma$. On pourra donc, une fois la ligne élastique construite, trouver sur elle le point qui correspond à un point M de la fibre neutre par le procédé suivant. On mène une tangente en M à le fibre neutre et on la coupe par

une droite arbitraire sous un angle σ; la tangente à la ligne élastique parallèle à cette droite la touchera au point cherché.

De (4) on tire encore en posant $ds' = \sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2}$

$$ds' = \mathrm{K}ds \qquad \text{où} \qquad \mathrm{K} = \sqrt{1 + \sigma^2}$$

ou

$$s' = \int \mathrm{K}ds \ . \tag{5}$$

En négligeant σ^2 devant 1 on obtient

$$s' = s \ . \tag{5'}$$

Pour avoir le rayon de courbure ρ' de la ligne élastique on remarquera que

$$\alpha + \delta\alpha = \alpha + d\alpha + d\varphi \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta\alpha}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\alpha}{ds}$$

ou enfin

$$\frac{\mathrm{K}}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\alpha}{ds} \ . \tag{6}$$

En négligeant σ^2 devant 1 on obtient

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\sigma}{ds} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \ , \tag{6'}$$

relation bien connue.

En éliminant s entre (5) et (6) ou entre (5') et (6'), on obtient l'équation intrinsèque de la ligne élastique.

Les équations (3) permettent encore de résoudre le problème, très important, suivant :

Supposons qu'on ait construit la ligne élastique pour une forme donnée de la fibre neutre $s_1 = f_1(\rho_1)$ ou $s_1 = f_1(\varphi_1)$ et un moment de flexion M et un moment d'inertie I donnés, c'est-à-dire un σ_1 donné, $\sigma_1 = \psi_1(s_1)$ ou $(\sigma_1 = \psi_1(\varphi_1)$. Trouver pour une forme de la fibre neutre $s_2 = f_2(\rho_2)$ ou $s_2 = f_2(\varphi_2)$, le moment d'inertie I, c'est-à-dire un $\sigma_2 = \psi_2(s_2)$ ou $\sigma_2 = \psi_2(\varphi_2)$, telle que la nouvelle ligne élastique se confonde avec la première.

Les équations (3) s'écriront pour les deux cas :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds_1} &= \sigma_1 - \frac{\xi}{\rho_1}, \\ \frac{d\xi}{ds_1} &= \frac{\eta}{\rho_1}, \end{aligned}\right\} \quad (7) \qquad \text{et} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds_2} &= \sigma_2 - \frac{\xi}{\rho_2}, \\ \frac{d\xi}{ds_2} &= \frac{\eta}{\rho_2}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Les équations (8) peuvent encore s'écrire :

$$\frac{d\eta}{ds_1} = \sigma_2 \frac{ds_2}{ds_1} - \frac{\xi}{\rho_2}\frac{ds_2}{ds_1}, \qquad \frac{d\xi}{ds_1} = \frac{\eta}{\rho_2}\frac{ds_2}{ds_1}, \tag{8'}$$

d'où en comparant (7) et (8′) on obtient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}\frac{ds_2}{ds_1}, \qquad \sigma_1 = \sigma_2 \frac{ds_2}{ds_1}$$

ou encore

$$d\varphi_2 = d\varphi_1 \qquad \sigma_2 = \sigma_1 \frac{ds_1}{ds_2} \tag{9'}$$

ou, finalement,

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_0, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 \rho_1}{\rho_2} \tag{9''}$$

où φ_0 est l'angle que forment entre elles les normales aux deux fibres neutres à l'origine. On voit que les points correspondants sont situés sur des normales qui forment un angle φ_0 entre elles. La seconde des relations (9″) permet, par un choix approprié de σ_2 qui dépend de M_2 et de I_2, de trouver les conditions pour qu'une forme donnée s_2 soit *tautoélastique* à une autre forme s_1. La forme qu'on prendra de préférence comme forme fondamentale sera un arc de cercle $s_1 = a_1\varphi_1$ ou $\rho_1 = a_1$ avec un I_1 constant. On aura alors pour les différentes formes choisies, comme conditions de *tautoélasticité* les relations suivantes :

Pour la développante de cercle

$$\rho_2^2 = 2a_2 s_2 \qquad \text{ou} \qquad \rho_2 = a_2\varphi_2, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1}{a_2(\varphi_1 - \varphi_0)},$$

pour la tractrice

$$\rho_2 = a_2\sqrt{e^{\frac{2s_2}{a_2}} - 1} \qquad \text{ou} \qquad \rho_2 = a_2 \operatorname{tg}\varphi_2, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1}{a_2(\varphi_1 - \varphi_0)}$$

pour la chaînette

$$\rho_2 = a_2 + \frac{s_2^2}{a_2} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{a_2}{\cos_2 \varphi_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1 \cos_2(\varphi_1 - \varphi_0)}{a_2}$$

pour la chaînette d'égale résistance

$$\rho_2 = \frac{a_2}{2}\left(e^{\frac{s_2}{a_2}} + e^{\frac{-s_2}{a_2}}\right) \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{a_2}{\cos \varphi_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)}{a_2}$$

pour la parabole

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{p}{\cos^3 \varphi_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1 \cos^3(\varphi_1 - \varphi_0)}{p}.$$

Par un choix approprié de φ_0 et de a_2 on pourra toujours faire passer l'arc de la courbe en question par les deux points O et A.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé qu'on connaissait μ pour chaque point de la lame OA. Généralement, il n'en est pas ainsi; cependant la méthode est toujours applicable. Considérons, par exemple, le cas de la figure 4. Supposons d'abord que le bout A de la lame puisse se déplacer le long de la droite OA et que la lame soit articulée en O. Si P est la résultante des forces verticales appliquées, on pourra déterminer V_1 et V_2 et par conséquent μ et σ. On pourra donc construire la courbe élastique correspondante. Supposons maintenant que la lame est également articulée en A; deux forces égales et opposées H s'introduiront alors. Il est évident que ces forces H doivent être telles que le déplacement du point A

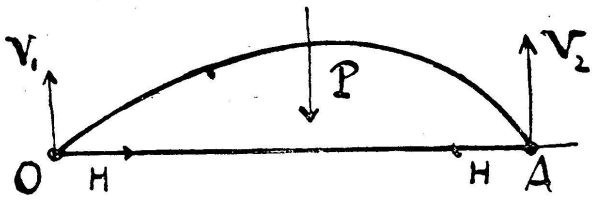

Fig. 4.

correspondant soit égal et opposé au déplacement correspondant aux forces V_1, V_2 et P. On aura donc

$$\sqrt{\xi_H^2 + \eta_H^2} = \sqrt{\xi_A^2 + \eta_A^2}$$

où (ξ_A, η_A) est le déplacement de A dû aux forces V_1, V_2 et P et (ξ_H, η_H) le déplacement de A dû aux forces H. On aura alors, en remarquant que

$$\sqrt{\xi_H^2 + \eta_H^2} = H\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2},$$

où (ξ_1, η_1) est le déplacement dû aux forces 1 parallèles et de même sens que H,

$$H = \frac{\sqrt{\xi_A^2 + \eta_A^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}.$$

De même, si la lame est en outre encastrée en A, il s'introduira un moment d'encastrement M_A et il faudra que $\left(\frac{\delta\eta}{\delta\xi}\right)_A$ provenant de V_1, V_2, P et H soit égal et opposé au $\left(\frac{\delta\eta}{\delta\xi}\right)_A^{M_A}$ provenant de M_A. On obtient donc pour M_A, en remarquant que $\left(\frac{\delta\eta}{\delta\xi}\right)_A = \sigma_A$

$$M_A \int_0^{s=OA} \frac{ds}{EI} = \sigma_A \qquad \text{d'où} \qquad M_A = \frac{\sigma_A}{\int_0^{s=OA} \frac{ds}{EI}}$$

où σ_A est dû aux forces V_1, V_2, P et H.

Dans le cas où σ^2 n'est pas négligeable devant σ, les équations (3) ne représentent plus la ligne élastique et il faut revenir aux équations (2) et à la courbe (G). Remarquons encore qu'il suffit de connaître une courbe quelconque (Γ) satisfaisant aux équations (2) et un point G de la courbe (G) correspondant à un point Γ de la courbe (Γ) pour pouvoir

construire la courbe (G) elle-même, car, comme il est facile de le vérifier, on a :

$$\sigma R = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}$$

c'est-à-dire *le segment de droite qui relie deux points correspondants de* (G) *et de* (Γ) *est inversement proportionnel à la rotation* σ *et fixe en direction.* D'autre part, *la droite* GM qui relie un point de la courbe (G) au point correspondant de la fibre neutre, *est tangente à la courbe* (G), car $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y}{x}$, comme il est facile de s'en convaincre en remplaçant dans (1) $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ par leurs valeurs tirées de (2). Ceci permet, une fois la courbe construite, de trouver immédiatement le point G qui correspond à un point M donné de la fibre neutre.

Le cas où σ a une valeur telle qu'on ne puisse plus négliger σ^2 devant σ ne se présentant généralement pas en pratique, nous ne nous arrêterons pas à son étude. En résumé, je crois avoir montré par l'exposé qui précède que l'emploi des coordonnées de M. Cesàro permet de résoudre facilement diverses questions se rapportant à la ligne élastique des lames de diverses formes, questions qui seraient plus difficilement abordables par une autre méthode.