5. — Approximation minimum.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

la représentation indéfiniment dérivable. Dans cette hypothèse, l'approximation de chaque dérivée est indéfiniment petite d'ordre supérieur à toute puissance de $\frac{1}{n}$. Réciproquement, l'existence d'un tel degré d'approximation assure celle de toutes les dérivées. Nous en reparlerons plus loin.

5. — Approximation minimum.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Parmi les polynômes de degré donné n, il en existe un, P_n, qui donne la meilleure approximation, tel donc que l'approximation soit minimum. Nous appellerons cette meilleure approximation *approximation minimum*, et le polynôme qui la donne est le *polynôme d'approximation* (ou d'approximation minimum).

La considération de ce polynôme remonte à une époque déjà ancienne, elle est due à Tchebycheff (7) (1859). Le grand géomètre russe a consacré une partie importante de son œuvre à l'étude de l'approximation par des fonctions rationnelles (entières ou fractionnaires). Mais l'importance des découvertes de Tchebycheff pour notre objet actuel n'est apparue qu'après le Mémoire de M. S. Bernstein (1912). Tant pour la valeur des matériaux réunis que par le mérite de l'invention, la place qui revient à Tchebycheff dans la théorie qui nous occupe est encore la première.

Tchebycheff, comme cela était naturel de son temps, admettait sans démonstration l'existence du polynôme d'approximation minimum. Cette démonstration a été donnée par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les séries de polynômes* (1905) (13). M. Borel a montré que le polynôme d'approximation minimum dans un intervalle (a, b) est unique et qu'il est caractérisé par la propriété suivante : la différence $f(x) - P_n$ acquiert sa valeur absolue minimum avec des signes alternés en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b). Ce maximum absolu est l'*approximation minimum* ρ_n. Il suit de cette propriété que le polynôme d'approximation est un *polynôme de Lagrange* qui coïncide avec $f(x)$ en $n+1$ points (au moins) de l'intervalle (a, b). J'ai donné en 1910 (14) à ces points de coïncidence le nom de *nœuds* et le polynôme de Lagrange est défini par ses nœuds.

Le calcul exact du polynôme d'approximation minimum n'est possible que dans des cas très exceptionnels. Mais il existe divers procédés de calcul qui permettent d'en approcher autant qu'on veut. Ces procédés sont dus à M. Borel (13), à moi-même (14) et à M. Bernstein (6). Ces procédés reviennent tous à former successivement des polynômes de Lagrange de plus en plus avantageux en améliorant progressivement le choix des nœuds.

Dans l'état actuel de la théorie, c'est l'approximation minimun qu'il importe surtout de connaître plutôt que le polynôme d'approximation lui-même. Faute d'un calcul exact, il convient donc d'avoir des règles précises pour enfermer l'approximation minimum entre des limites suffisamment resserrées. Ce sont ces règles qui méritent de fixer maintenant notre attention.

La détermination d'une borne supérieure est chose immédiate. Tout polynôme donné Q_n de degré n en fournit une, à savoir le maximum de $|f - Q_n|$.

La détermination d'une borne inférieure demande un peu plus de réflexion. Mais j'ai donné dans mon Mémoire de 1910 (14) une règle, qui m'a paru intéressante, en vertu de laquelle un polynôme de Lagrange de degré n fournit généralement une telle borne.

Voici d'abord cette règle :

Soit Q_n *un polynôme de degré* n ; *si la différence* $f(x) - Q_n$ *prend, en* $n+2$ *points consécutifs et avec des signes alternés, des valeurs absolues* $\gtreqless \rho$, *alors* ρ *est une borne inférieure de l'approximation minimum.*

En particulier, si Q_n est un polynôme de Lagrange à $n+1$ nœuds, ces $n+1$ nœuds partagent (a, b) en $n+2$ intervalles, où $f - Q_n$ est (sauf exception) de signe alterné. Dans chaque intervalle, $f - Q_n$ passe par un maximum absolu et le plus petit ρ de ces maxima absolus est une borne inférieure de l'approximation minimum.

La démonstration de notre règle est presque immédiate. Soit P_n le polynôme d'approximation et ρ_n l'approximation minimum ; si l'on avait $\rho_n < \rho$. le polynôme de degré n,

$$P_n - Q_n = (f - Q_n) - (f - P_n),$$

changerait de signe $n + 2$ fois au moins dans l'intervalle (a, b) et aurait, par conséquent, $n + 1$ racines au moins, ce qui est impossible.

M. Bernstein a généralisé notre théorème dans son Mémoire couronné de 1912 (6). Il l'a étendu au cas où les polynômes sont formés avec des puissances de x dont les exposants font partie d'une suite de nombres positifs (entiers ou non) qui sont assignés d'avance. Il s'est servi de ce théorème généralisé pour trouver une borne inférieure de la meilleure approximation de $|x|$.

La règle précédente présente le grand avantage d'avoir une efficacité illimitée. En effet, en essayant de nouveaux polynômes Q_n, on peut, théoriquement du moins, approcher autant qu'on veut de la valeur exacte de l'approximation. Il existe d'autres règles qui ont un caractère plus particulier et qui épuisent leur efficacité dès la première application, mais qui n'en sont pas moins très utiles, parce qu'elles sont dans bien des cas d'une application plus facile que la précédente. Je vais en signaler deux, qui s'appliquent directement à l'approximation trigonométrique et indirectement aux polynômes, grâce à la substitution de Bernstein. Il est à peine besoin de dire que les considérations précédentes sur la meilleure approximation par polynômes s'étendent *mutatis mutandis* à la meilleure approximation trigonométrique.

Considérons, avec M. Bernstein (1912), le développement de $f(x)$ en série de polynômes trigonométriques ou, ce qui est exactement la même chose, le développement de $f(\cos\varphi)$ en série de Fourier

$$f(\cos\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots$$

Soit S_n la somme des $n + 1$ premiers termes, on sait que les valeurs a_0, a_1, ... a_n des constantes de Fourier sont celles qui miniment l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\varphi) - S_n]^2 d\varphi .$$

Soit donc T_n la suite trigonométrique d'ordre n qui donne l'approximation minimum, on aura

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\varphi) - S_n]^2 d\varphi \lesseqgtr \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f - T_n)^2 d\varphi \lesseqgtr 2\rho_n^2 ,$$

en vertu du théorème de la moyenne (ρ_n étant la valeur maximum absolue de $f - T_n$). Mais la première intégrale a pour valeur

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[a_{n+1}\cos(n+1)\varphi + a_{n+2}\cos(n+2)\varphi + \dots]^2 d\varphi$$
$$= a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots .$$

De là, la règle de M. Bernstein :

Si l'on désigne par a_0, a_1, a_2, ... *les constantes de Fourier de* $f(\cos\varphi)$ *la meilleure approximation* ρ_n *de* $f(x)$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *satisfait à la condition*[1]

$$\rho_n \gtreqless \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots)} .$$

Il est clair d'ailleurs que l'on a, d'autre part,

$$\rho_n \lesseqgtr |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots ,$$

puisque cette approximation est donnée par la série de polynômes trigonométriques.

La seconde règle, qui est plus importante et qui est antérieure (1910), a été donnée par M. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les intégrales singulières* (15). Voici la règle de M. Lebesgue :

---

[1] Nous avons ajouté sous le radical le facteur $\frac{1}{2}$ qui manque dans le texte de M. Bernstein.

Si la somme d'ordre n *de la série de Fourier de la fonction périodique* f(x) *donne une approximation* $\varphi(n)$, *l'approximation trigonométrique minimum* ρ_n *satisfait à la condition*

$$\rho_n > k\,\frac{\varphi(n)}{\log n},$$

où k *est une constante numérique assignable a priori.*

La démonstration repose sur les propriétés de l'intégrale de Dirichlet, mais, si simple qu'elle soit, elle ne peut trouver place ici.

Si l'on applique, par exemple, les deux règles précédentes à la fonction $|x|$, la règle de M. Bernstein prouve que ρ_n n'est pas d'ordre supérieur à $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ et celle de M. Lebesgue que ρ_n n'est pas d'ordre supérieur a $\frac{1}{n\log n}$. Dans ce cas, c'est la règle de Lebesgue qui l'emporte, mais il n'en est pas toujours ainsi.

6. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés différentielles.

La meilleure approximation ρ_n d'une fonction continue $f(x)$ par un polynôme de degré n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. C'est le théorème même de Weierstrass. J'ai posé en 1908 (12) la question de déterminer l'ordre de grandeur de ρ_n pour n infini et M. Bernstein a posé en 1912 (6) celle d'en déterminer la valeur asymptotique quand elle existe.

Aujourd'hui des résultats définitifs sont acquis et répondent à ces deux questions. Ils sont dus à M. Dunham Jackson (1911) et surtout à M. Bernstein (1912).

Un premier résultat essentiel est qu'il existe une dépendance étroite entre l'ordre de la meilleure approximation et l'existence des dérivées jusqu'à un ordre plus ou moins élevé.

L'existence d'une dérivée bornée d'un certain ordre assure une approximation d'un ordre correspondant et c'est M. Dunham Jackson (8) qui a trouvé les théorèmes les plus précis