SUR L'INTÉGRALE $n!\int_0^h \frac{h^n e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}\,dh$,

PAR

Félix VANEY et Maurice PASCHOUD (Lausanne).

I. — Dans un mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France*, LAGUERRE (*Œuvres*, t. I, p. 415) considère l'intégrale

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz$$

et il en déduit les propriétés fondamentales des polynômes $U(x)$ d'HERMITE.

En partant de l'intégrale

$$n!\int_0^h \frac{h^n e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}\,dh\ ,$$

on peut, par un calcul analogue à celui de LAGUERRE, établir les propriétés essentielles des polynômes P_n qu'il a obtenus dans un autre mémoire du même Bulletin (*Œuvres*, t. I, p. 434), et qu'il définit (*Œuvres*, t. I, p. 436) par la relation :

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = P_0 + P_1\frac{h}{1\,!} + P_2\frac{h^2}{2\,!} + \ldots + P_n\frac{h^n}{n\,!} + \ldots \qquad (1)$$

où P_n a comme expression générale :

$$P_n(x) = n\,!\left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right]. \qquad (2)$$

LAGUERRE indique les propriétés suivantes des polynômes P_n.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \text{ pour } m \neq n ,$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x P_n^2(x)\, dx = [n\,!]^2 ,$$

ainsi que les relations

$$P_{n+1} = (x + 2n + 1) P_n - n^2 P_{n-1} ,$$

$$x P_n' = n P_n - n^2 P_{n-1} ,$$

$$x P_n'' + (x+1) P_n' - n P_n = 0 .$$

On voit de plus que

$$P_n = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^x] .$$

II. — Posons pour abréger $\dfrac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = T$.

On a

$$\frac{d}{dh}[h^p (1-h)^2 T] = p h^{p-1} T - (x + 2p + 1) h^p T + (p+1) h^{p+1} T .$$

En multipliant les 2 membres par dh et intégrant de 0 à h, il vient :

$$(p+1)\int_0^h h^{p+1} T\, dh = h^p (1-h)^2 T + (x + 2p + 1)\int_0^h h^p T\, dh - p\int_0^h h^{p-1} T\, dh .$$

Si l'on pose

$$\frac{I_n}{n\,!} = \int_0^h h^n T\, dh ,$$

il vient entre 3 intégrales définies consécutives la formule de récurrence

$$I_{p+1} = p\,! \, h^p (1 - h^2) T + (x + 2p + 1) I_p - p^2 I_{p-1} . \qquad (3)$$

On voit de suite que

$$I_1 = (1-h)^2 T + (x+1) I_0 - 1 ,$$

et, en tenant compte de cette dernière relation, (3) donne successivement :

pour $p = 1$: $I_2 = (h + x + 3)(1 - h)^2 T + (x^2 + 4x + 2) I_0 - (x + 3)$,

pour $p = 2$: $I_3 = [2h^2 + (x + 5)h + x^2 + 8x + 11](1 - h)^2 T$
$+ (x^3 + 9x^2 + 18x + 6) I_0 - (x^2 + 8x + 11)$.

D'une façon générale

$$I_n = [\theta_n(h, x)](1 - h)^2 T + P_n I_0 - V_n(x) , \qquad (4)$$

où $\theta_n(h, x)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$ en h et en x, $P_n(x)$ est un polynôme de degré n en x et $V_n(x)$ un polynôme de degré $(n - 1)$ en x.

On a en outre $V_n(x) = \theta_n(0, x)$.

D'après les calculs précédents :

$$\theta_1(h, x) = 1 \; ; \qquad \theta_2(h, x) = h + x + 3 \; ;$$

$$\theta_3(h, x) = 2h^2 + (x + 5)h + x^2 + 8x + 11 \; .$$

$$V_1(x) = 1 \; ; \qquad V_2(x) = x + 3 \; ; \qquad V_3(x) = x^2 + 8x + 11 \; .$$

$$P_1(x) = x + 1 \; ; \qquad P_2(x) = x^2 + 4x + 2 \; ; \qquad P_3(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 6 \; .$$

De plus

$$P_0 = 1 \; .$$

En dérivant chaque membre de l'identité

$$p\,! \int_0^h h^p e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = I_p - \frac{1}{p+1} I_{p+1}$$

par rapport à x, on trouve

$$I_{p+1} = \frac{dI_{p+1}}{dx} - (p + 1) \frac{dI_p}{dx} \; . \qquad (5)$$

Cette relation donne pour $p = 0$

$$I_1 = \frac{dI_1}{dx} - \frac{dI_0}{dx}$$

et, en tenant compte de $I_1 = (1 - h)^2 T + (x + 1) I_0 - 1$, on obtient

$$\frac{dI_0}{dx} = \frac{1}{x}(1 - h)\,T + I_0 - \frac{1}{x} , \qquad (6)$$

expression qui sera utilisée dans la suite.

III. — Il existe des relations de récurrence pour les polynômes θ, V, P. Partons de la relation (3) en y remplaçant I_n par son expression (4), il vient :

$$[\theta_{n+1}.(1-h)^2T + P_{n+1}I_0 - V_{n+1}] - (x+2n+1)[\theta_n.(1-h)^2T + P_nI_0 - V_n]$$
$$+ n^2[\theta_{n-1}(1-h)^2T + P_{n-1}I_0 - V_{n-1}] = n!\,h^n(1-h)^2T\ ,$$

d'où les relations cherchées

$$\theta_{n+1} - (x+2n+1)\theta_n + n^2\theta_{n-1} = n!\ h^n\ , \tag{7}$$

$$V_{n+1} - (x+2n+1)V_n + n^2V_{n-1} = 0\ , \tag{8}$$

$$P_{n+1} - (x+2n+1)P_n + n^2P_{n-1} = 0\ . \tag{9}$$

La formule (9) montre que les P_n sont bien les polynômes de Laguerre, car $P_1 = x + 1$ et $P_2 = x^2 + 4x + 2$.

La formule (8) se déduit de (7) en y faisant $h = 0$; elle est identique à (9), mais les polynômes V_n sont différents des polynômes P_n, car $V_1 = 1$ et $V_2 = x + 3$.

IV. — Dérivons les deux membres de (4) par rapport à x; il vient, en remplaçant $\frac{dI_0}{dx}$ par sa valeur (6) et en tenant compte de (5) :

$$(1-h)\left[\theta_{n+1} - \frac{d\theta_{n+1}}{dx} + (n+1)\frac{d\theta_n}{dx}\right] + h[\theta_{n+1} - (n+1)\theta_n]$$
$$= \frac{P_{n+1} - (n+1)P_n}{x}\ , \tag{10}$$

$$V_{n+1} = \frac{dV_{n+1}}{dx} - (n+1)\frac{dV_n}{dx} + \frac{P_{n+1} - (n+1)P_n}{x}\ , \tag{11}$$

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} = (n+1)\left(\frac{dP_n}{dx} + P_n\right)\ . \tag{12}$$

La relation (11) s'obtiendrait de (10) en y faisant $h = 0$.

De (12) on déduit le développement suivant de P'_n :

$$P'_n = nP_{n-1} + n(n-1)P_{n-2} + \dots + n!\ P_0\ . \tag{13}$$

De (9) et (12) on tire sans peine la relation indiquée par LAGUERRE

$$xP'_n = nP_n - n^2 P_{n-1} \tag{14}$$

et l'équation différentielle

$$xP''_n + (x+1)P'_n - nP_n = 0 \ . \tag{15}$$

V. — Posons $\theta_n = e^{\frac{x}{1-h}} . H_n$.

En utilisant la relation (14) et en substituant cette valeur de θ_n dans la relation (10), on obtient :

$$(n+1)\left(H_n + \frac{dH_n}{dx}\right) - \frac{dH_{n+1}}{dx} = \frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{1-h}\frac{P'_{n+1}}{n+1} \ . \tag{16}$$

La relation de récurrence entre les H_n est

$$H_{n+1} - (x + 2n + 1)H_n + n^2 H_{n-1} = n!\, h^n e^{-\frac{x}{1-h}} \ . \tag{17}$$

De (16) et (17) on déduit finalement l'équation différentielle :

$$x\frac{d^2H_n}{dx^2} + (x+1)\frac{dH_n}{dx} - nH_n$$

$$= \frac{e^{-x}}{1-h} T[hP_n - 2(1-h)P'_n - n!\, h^{n+1}] \ , \tag{18}$$

qui ne diffère de celle des polynômes de LAGUERRE que par la présence du second membre.

Pour $h = 0$, $H_n(0, x) = e^{-x} V_n$ et (18) donne l'équation différentielle à laquelle satisfont les polynômes V_n

$$x\frac{d^2V_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dV_n}{dx} - (n+1)V_n = -2P'_n \ . \tag{19}$$

VI. — La fonction $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}$, considérée par ABEL[1] (*Œuvres*, t. II, p. 284), donne naissance à des polynômes Q_n si on la développe suivant les puissances croissantes de h

$$\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = Q_0 + Q_1\frac{h}{1!} + Q_2\frac{h^2}{2!} + \dots + Q_n\frac{h^n}{n!} + \dots \tag{20}$$

---

[1] Voir aussi NIJLAND, *Over een bijsondere soort van geheele functiën*. Utrecht, 1896. (Thèse).

où Q_n a comme expression générale :

$$Q_n(x) = n!\left[1 - nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \dots\right]. \quad (21)$$

Abel indique en outre les propriétés suivantes de ces polynômes

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n(x)\, Q_m(x)\, dx = 0\,, \qquad \text{pour} \quad m \neq n$$

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n^2(x)\, dx = [n!]^2\,.$$

En partant de la fonction génératrice, il est facile d'obtenir la relation de récurrence des polynômes Q_n

$$Q_{n+1} - (2n + 1 - x)Q_n + n^2 Q_{n-1} = 0\,,$$

ainsi que l'équation différentielle

$$xQ_n'' + (1 - x)Q_n' + nQ_n = 0\,.$$

Q_n s'exprime encore sous forme de dérivée n^{me}

$$Q_n = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}]\,.$$

VII. — Le développement des Q_n en fonction des P_n peut s'obtenir au moyen de l'équation différentielle :

$$Q_n = (-1)^n\left[P_n - \frac{n^2}{1}2P_{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2}2^2P_{n-2} - \dots\right.$$
$$\left.(-1)^r\frac{n^2(n-1)^2\dots(n-r+1)^2}{1.2.3\dots r}2^rP_{n-r} - \dots (-1)^n n!\,2^n P_0\right].$$

Comme les polynômes Q_n se déduisent des P_n en y remplaçant x par $-x$ et réciproquement, il est possible d'écrire

$$P_n = (-1)^n\left[Q_n - \frac{n^2}{1!}2Q_{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2}2^2Q_{n-2} - \dots\right.$$
$$\left.(-1)^r\frac{n^2(n-1)^2\dots(n-r+1)^2}{1.2.3\dots r}2^rQ_{n-r} - \dots (-1)^n n!\,2^n Q_0\right].$$

Ces développements sont, à l'alternance des signes près et aux puissances de 2 près dans les coefficients, analogues à l'expression générale (21) de Q_n ou à celle (2) de P_n.

Remplaçons maintenant dans le développement (20) h par $\frac{1}{h}$ et multiplions chaque membre par e^{-x} on obtient

$$-\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = \tag{22}$$

$$e^{-x}\left[\frac{Q_0}{h} + \frac{Q_1}{1\,!}\frac{1}{h_2} + \frac{Q_2}{2\,!}\frac{1}{h^3} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{(n-1)\,!}\frac{1}{h^n} + \frac{Q_n}{n\,!}\frac{1}{h^{n+1}} + \dots\right].$$

Ce second membre représente le développement suivant les puissances décroissantes de h de la fonction génératrice des polynômes de LAGUERRE.

De la même manière, on tire de (1) le développement suivant les puissances décroissantes de h de la fonction $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}$.

$$-\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} =$$

$$e^{x}\left[\frac{P_0}{h} + \frac{P_1}{1\,!}\frac{1}{h^2} + \frac{P_2}{2\,!}\frac{1}{h^2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{(n-1)\,!}\frac{1}{h^n} + \frac{P_n}{n\,!}\frac{1}{h^{n+1}} + \dots\right].$$

Multiplions chaque membre de cette dernière relation par $n\,!\,h^n dh$ et intégrons de 0 à h, il vient :

$$-I_n = -\int_0^h \frac{n\,!\,h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = n\,!\,e^x\left[\frac{P_0}{n}\frac{h^n}{1\,!} + \frac{P_1}{n-1}\frac{h^{n-1}}{2\,!} + \frac{P_2}{n-2}\frac{h^{n-2}}{3\,!}\right.$$

$$\left. + \frac{P_3}{n-3}\frac{h^{n-3}}{4\,!} + \dots + \frac{P_{n-1}}{1}\frac{h}{(n-1)\,!} + \dots\right]. \tag{23}$$

VIII. — En utilisant une méthode indiquée par Hermite à propos de l'intégrale $\int_0^h \frac{h^n\,dh}{\sqrt{1-2hx+h^2}}$ (*Œuvres*, t. IV, p. 169), on voit que les polynômes θ_n et V_n peuvent s'exprimer au moyen des P_n et des Q_n.

Si l'on écrit (4) de la manière suivante :

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} \mathrm{I}_n = \theta_n(h, x) + \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} \mathrm{P}_n \mathrm{I}_0 - \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} \mathrm{V}_n$$

on remarque que $\theta_n(h, x)$ forme la partie entière du produit

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} \int_0^h \frac{n!\,h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh .$$

développé suivant les puissances décroissantes de h.

Si l'on remplace les deux facteurs par leur développement respectif (22) et (23) et si l'on multiplie membre à membre, on obtient le développement de $\theta_n(h, x)$ suivant les puissances décroissantes de h

$$\begin{aligned} \theta_n(h, x) = n! \Big[& \frac{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0}{n} h^{n-1} + \left(\frac{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1}{n} + \frac{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_0}{n-1}\right) h^{n-2} \\ & + \left(\frac{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_2}{n.2!} + \frac{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}{(n-1).1!1!} + \frac{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_0}{(n-2).2!.1}\right) h^{n-3} \\ & + \left(\frac{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_3}{n.3!} + \frac{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2}{(n-1).1!2!} + \frac{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1}{(n-2).2!1!} + \frac{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_0}{(n-3).3!}\right) h^{n-4} + \dots \\ & + \left(\frac{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_i}{n.i!} + \frac{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_{i-1}}{(n-1).1!(i-1)!} \right. \\ & \left. + \frac{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_{i-2}}{(n-2).2!(i-2)!} + \dots + \frac{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_0}{(n-i).i!}\right) h^{n-i-1} + \dots \Big] . \end{aligned} \tag{24}$$

Le développement de V_n est formé de tous les termes ne contenant pas h

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_n = {} & \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_{n-1} + \frac{n}{1!}\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_{n-3} \\ & + \dots + \frac{n(n-1)}{1!}\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{Q}_1 + \frac{n}{1}\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_0 . \end{aligned} \tag{25}$$

Un autre développement de V_n, ayant la forme :

$$\mathrm{V}_n = a_1\mathrm{P}_{n-1} + \dots + a_r\mathrm{P}_{n-r} + \dots + a_n\mathrm{P}_0 ,$$

s'obtient au moyen de l'équation différentielle (19) et du développement (13)

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_n = {} & \mathrm{P}_{n-1} + 2(n-1)\mathrm{P}_{n-2} + (n-2)(3n-4)\mathrm{P}_{n-3} \\ & + 2^2(n-2)^2(n-3)\mathrm{P}_{n-4} + (n-3)(n-4)(5n^2-25n+32)\mathrm{P}_{n-5} + \dots \end{aligned}$$

chaque coefficient s'obtenant au moyen du précédent par la formule de récurrence

$$a_r = \frac{2}{2n - r + 1}\left[(n - r + 1)^2 a_{r-1} + \frac{n!}{(n-r)!}\right] .$$

IX. — En prenant $h = 1$, comme limite supérieure dans l'intégrale I_n et son expression (4), il vient :

$$\int_0^1 \frac{n!\,h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = - V_n + P_n \int_0^1 \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} dh ,$$

ou encore

$$\int_0^1 \frac{n!\,h^n}{1-h} e^{-\frac{x}{1-h}} dh = - e^{-x} V_n + P_n \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{1-h} dh .$$

Posons $z = \frac{x}{1-h}$; on a, après substitution,

$$\int_x^\infty n!\,(z-x)^n \frac{e^{-z}}{z^{n+1}} dz = - e^{-x} V_n + P_n \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz . \qquad (26)$$

Le premier membre peut se mettre sous forme d'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $\frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$; ces intégrales multiples donnent donc naissance aux polynômes P_n.

La formule (26) est celle obtenue par LAGUERRE (*Œuvres*, t. I, p. 432), qui en déduit que P_n est le dénominateur de la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la fonction $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$, le polynôme V_n étant le numérateur de cette réduite.

Enfin on remarque que l'intégrale I_n se transforme par le changement de x en $-x$, en une nouvelle intégrale J_n qui donne naissance aux polynômes Q_n d'ABEL

$$J_n = \int_0^h \frac{n!\,h^n}{1-h} e^{\frac{hx}{1-h}} dh = [\Omega_n(h, x)](1-h)^2 \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} + Q_n J_0 - W_n(x) ,$$

où

$$\Omega_n(h, x) = \theta_n(h, -x) ,$$

$$Q_n(x) = P_n(-x) ,$$

$$W_n(x) = V_n(-x) .$$