EXTENSION DE LA NOTION DE JACOBIEN

Autor(en): **Stuyvaert, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18042

EXTENSION DE LA NOTION DE JACOBIEN

PAR

M. Stuyvaert (Gand).

---

1. — On connaît pour n fonctions à n variables, le *théorème de J. Bertrand* relatif au déterminant fonctionnel ou Jacobien J de ces fonctions[1],

$$J = \begin{vmatrix} d_1 f & d_1 \varphi & \dots \\ d_2 f & d_2 \varphi & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y & \dots \\ d_2 x & d_2 y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

les lignes du dernier déterminant ci-dessus étant n systèmes d'accroissements des variables x, y,... et les lignes du premier déterminant étant les différentielles totales correspondantes des fonctions f, φ,...

L'égalité ci-dessus résulte immédiatement de la règle de multiplication des déterminants, et peut s'écrire en notation abrégée,

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \dots f_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} .$$

Le Jacobien joue, à l'égard des fonctions de plusieurs variables, un rôle analogue à celui de la dérivée d'une fonction d'une variable. Ainsi la notation précédente conduit immédiatement à ces deux corollaires :

1° Pour les fonctions inverses,

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots f_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} \times \frac{D(x_1, x_2, \dots x_n)}{D(f_1, f_2, \dots f_n)} = 1 ;$$

2° Pour les changements de variables (ou, ce qui revient au

---

[1] Voir p. ex. Niewenglowski, *Algèbre*, t. II, p. 176.

même, pour les fonctions de fonctions), si $x_i = \varphi_i(y_1, y_2 \dots y_n)$, on a

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots f_n)}{D(y_1, y_2, \dots y_n)} = \frac{D(f_1, f_2, \dots f_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} \times \frac{D(x_1, x_2, \dots x_n)}{D(y_1, y_2, \dots y_n)} ;$$

en particulier si la substitution φ est linéaire, le second rapport est le module de la substitution et l'on voit que le Jacobien d'un système de formes algébriques est un covariant.

Enfin on sait que si le Jacobien est identique à zéro, il existe une relation identique entre les fonctions, ou bien l'une d'elles est constante.

2. — La première extension de la notion de Jacobien est relative à m fonctions de n variables ($m \gtrless n$), mais en prenant toujours les dérivées partielles du premier ordre.

Le cas de $m = n \pm 1$ a déjà été rencontré, au moins pour les formes algébriques, par L. Cremona et par nous, dans nos *Cinq Etudes de Géométrie analytique*[1], pour quatre variables homogènes et trois ou cinq surfaces algébriques.

On peut évidemment considérer aussi deux ou quatre courbes algébriques dans un plan : dans le premier cas on a la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{matrix} \right\|$$

qui s'annule pour des points du plan en nombre généralement fini ; si f est de degré n et g de degré n', ce nombre est

$$(n-1+n'-1)^2 - (n-1)(n'-1) = n^2 + nn' + n'^2 - 3(n+n') + 3 .$$

Ce sont les points qui ont même droite polaire relativement aux deux courbes. Dans le cas de deux coniques, ce sont les sommets du triangle conjugué commun.

Si l'on a quatre courbes planes f_1, f_2, f_3, f_4 d'ordres

---

[1] Gand, Van Goethem, 1908, p. 30 et suiv.

n_1, n_2, n_3, n_4, la matrice Jacobienne représente des points isolés en nombre

$$\begin{aligned}(n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1)(n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_4 - 1) \\ - (n_1 - 1 + n_2 - 1)^2 + (n_1 - 1)(n_2 - 1) \\ = \Sigma n_1 n_2 - 3\Sigma n + 6 \ .\end{aligned}$$

Ces points sont ceux dont les droites polaires, pour les quatre courbes, passent par un même point. Parmi ces points figurent les points communs aux quatre courbes, s'il y en a (mais non pas les points doubles des courbes données).

Pour étendre à l'espace ordinaire, on pourra prendre deux ou six surfaces, et les matrices ayant alors deux colonnes de plus que de lignes, s'annulent pour des points isolés dont l'étude est analogue à ce qui précède. Et de même pour l'hyperespace.

3. — La matrice jacobienne étudiée à l'instant a un sens pour toutes les fonctions possédant des dérivées partielles et non seulement pour les polynômes homogènes. Son évanouissement identique correspond encore, si aucune des fonctions n'est constante, à une relation identique entre les fonctions.

Le théorème de J. Bertrand est applicable et donne (pour fixer les idées)

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} d_1 x_1 & d_2 x_1 & d_3 x_1 & d_4 x_1 \\ d_1 x_2 & d_2 x_2 & d_3 x_2 & d_4 x_2 \\ d_1 x_3 & d_2 x_3 & d_3 x_3 & d_4 x_3 \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} d_1 f & d_2 f & d_3 f & d_4 f \\ d_1 \varphi & d_2 \varphi & d_3 \varphi & d_4 \varphi \end{Vmatrix} \ ;$$

la multiplication est *à droite* et lignes par colonnes, suivant l'usage de la théorie abstraite des matrices. Ecrivons ceci en abrégé

$$J \times M = D \ ,$$

d'où

$$J = D \times M^{-1} \ .$$

Corollaire pour les fonctions inverses :

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial f} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial f} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial f} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} d_1 f & d_2 f & d_3 f & d_4 f \\ d_1 \varphi & d_2 \varphi & d_3 \varphi & d_4 \varphi \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} d_1 x_1 & d_2 x_1 & d_3 x_1 & d_4 x_1 \\ d_1 x_2 & d_2 x_2 & d_3 x_2 & d_4 x_2 \\ d_1 x_3 & d_2 x_3 & d_3 x_3 & d_4 x_3 \end{matrix} \right\| ,$$

en abrégé

$$K \times D = M , \qquad \text{d'où} \qquad K = M \times D^{-1} ,$$

par suite

$$J \times K = D \times M^{-1} \times M \times D^{-1} = 1 .$$

Corollaire pour le changement de variables : si les x sont fonctions, par exemple de y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, on a

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_i} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_i} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial y_i} \end{matrix} \right\|_1^5 \times \left\| \begin{matrix} d_i y_1 \\ d_i y_2 \\ d_i y_3 \\ d_i y_4 \\ d_i y_5 \end{matrix} \right\|_1^4 = \left\| \begin{matrix} d_1 x_1 & d_2 x_1 & d_3 x_1 & d_4 x_1 \\ d_1 x_2 & d_2 x_2 & d_3 x_2 & d_4 x_2 \\ d_1 x_3 & d_2 x_3 & d_3 x_3 & d_4 x_3 \end{matrix} \right\| ,$$

en abrégé

$$L \times N = M \qquad \text{ou} \qquad L = M \times N^{-1} ,$$

M ayant le sens de plus haut. D'autre part,

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial y_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} \end{matrix} \right\|_1^5 \times \left\| \begin{matrix} d_i y_1 \\ d_i y_2 \\ d_i y_3 \\ d_i y_4 \\ d_i y_5 \end{matrix} \right\|_1^4 = \left\| \begin{matrix} d_i f \\ d_i \varphi \end{matrix} \right\|_1^4$$

en abrégé

$$J' \times N = D .$$

N et D ayant le sens de plus haut. Or on a aussi $J \times M = D$, d'où

$$J \times M = J' \times N$$

$$J \times M \times N^{-1} = J'$$

ou enfin

$$J \times L = J' .$$

4. — Pour les fonctions u, v, ... quelconques (algébriques ou non) de x, y, ..., on peut encore généraliser la notion du jacobien en faisant intervenir des dérivées partielles d'ordre supérieur au premier. Prenons le cas de deux fonctions et deux variables, pour fixer les idées et posons

$$J \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{Vmatrix} .$$

Cette matrice est identiquement nulle si l'une des fonctions u, v est linéaire en x et y, ou si $\frac{\partial u}{\partial x}$ est une fonction arbitraire de F $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ une fonction G de $\frac{\partial v}{\partial y}$, arbitraire aussi sauf la restriction que la dérivée de G par rapport à x soit identique à la dérivée de F par rapport a y. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette propriété et de la généraliser.

L'extension du théorème de J. Bertrand s'effectue en multipliant (à droite et lignes par colonnes) la Jacobienne ci-dessus par la matrice carrée

$$M \equiv \begin{Vmatrix} (d_1 x)^2 & d_1 x d_2 x & (d_2 x)^2 \\ 2 d_1 x d_1 y & d_1 x d_2 y + d_2 x d_1 y & 2 d_2 x d_2 y \\ (d_1 y)^2 & d_1 y d_2 y & (d_2 y)^2 \end{Vmatrix}$$

ce qui donne

$$D \equiv \begin{Vmatrix} d_1^2 u & d_1 u d_2 u & d_2^2 u \\ d_1^2 v & d_1 v d_2 v & d_2^2 v \end{Vmatrix} .$$

Puisque

$$J \times M = D ,$$

on en conclut

$$J = D \times M^{-1} .$$

Le corollaire pour les fonctions inverses ne semble rien donner d'intéressant.

Voici un corollaire pour les changements de variables. Soient X, Y les nouvelles variables, J' la Jacobienne pour ces nouvelles variables et N la matrice carrée analogue à M pour X, Y ; alors

$$J' = D \times N^{-1} ,$$

d'où facilement

$$J' = J \times M \times N^{-1}$$

et de même

$$J = J' \times N \times M^{-1} .$$

Cas particulier de la substitution linéaire,

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y$$
$$y = \lambda_2 X + \mu_2 Y ,$$

alors

$$(d_i x)^2 = \lambda_1^2 (d_i X)^2 + 2\lambda_1 \mu_1 d_i X d_i Y + \mu_1^2 (d_i Y)^2 \ (i = 1, 2) ,$$

$$d_i x d_i y = \lambda_1 \lambda_2 (d_i X)^2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) d_i X d_i Y + \mu_1 \mu_2 (d_i Y)^2 ,$$

$$d_1 x d_2 x = (\lambda_1 d_1 X + \mu_1 d_1 Y)(\lambda_1 d_2 X + \mu_1 d_2 Y)$$
$$= \lambda_1^2 d_1 X d_2 X + \lambda_1 \mu_1 (d_1 X d_2 Y + d_2 X d_1 Y) + \mu_1^2 d_1 Y d_2 Y ,$$

$$d_1 x d_2 y + d_2 x d_1 y$$
$$= (\lambda_1 d_1 X + \mu_1 d_1 Y)(\lambda_1 d_2 X + \mu_2 d_2 Y) + (\lambda_1 d_2 X + \mu_1 d_2 Y)(\lambda_2 d_1 X + \mu_2 d_1 Y)$$
$$= 2\lambda_1 \lambda_2 d_1 X d_2 X + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)(d_1 X d_2 Y + d_2 X d_1 Y) + 2\mu_1 \mu_2 d_1 Y d_2 Y ,$$

etc.

Donc M est le produit (à droite) de

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 \mu_1 & \mu_1^2 \\ 2\lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 & 2\mu_1 \mu_2 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 \mu_2 & \mu_2^2 \end{matrix} \right\| \quad \text{ou } \Delta$$

par

$$\left\| \begin{matrix} (d_1 X)^2 & d_1 X d_2 X & (d_2 X)^2 \\ 2 d_1 X d_1 Y & d_1 X d_2 Y + d_2 X d_1 Y & 2 d_2 X d_2 Y \\ (d_1 Y)_2 & d_1 Y d_2 Y & (d_2 Y)^2 \end{matrix} \right\| ;$$

cette dernière est N, finalement

$$J' = J \times \Delta \times N \times N^{-1} = J \times \Delta$$

et la *matrice* carrée Δ ne contient que les éléments de la substitution ; on sait que le *déterminant* Δ vaut le cube du module $(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)$ de la substitution.

5. — Si la matrice proposée est

$$K \equiv \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{matrix} \right\|,$$

le théorème de J. Bertrand est encore applicable, mais avec multiplication à gauche,

$$\left\| \begin{matrix} (d_1 x)^2 & 2 d_1 x d_1 y & (d_1 y)^2 \\ d_1 x d_2 x & d_1 x d_2 y + d_2 x d_1 y & d_1 y d_2 y \\ (d_2 x)^2 & 2 d_2 x d_2 y & (d_2 y)^2 \end{matrix} \right\| \times K$$

donne

$$\left\| \begin{matrix} d_1^2 u & d_1^2 v \\ d_1 u d_2 u & d_1 v d_2 v \\ d_2^2 u & d_2^2 v \end{matrix} \right\|.$$

De même pour le changement de variables et la substitution linéaire, mais avec multiplication à gauche.

Un cas particulier de ce qui précède (et qui correspond au Hessien dans la théorie du Jacobien) est celui où u, v, ... sont elles-mêmes déjà des dérivées partielles d'une fonction f.

Exemple

$$H \equiv \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \\ \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} \end{matrix} \right\|.$$

Le théorème de J. Bertrand ne semble pas avoir ici d'analogue simple, mais bien le corollaire de la substitution linéaire : le dernier résultat ci-dessus conduit à

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^3}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^2 \partial \mathrm{Y}}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X} \partial \mathrm{Y}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Y}^3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^3}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^2 \partial \mathrm{Y}}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X} \partial \mathrm{Y}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Y}^3}\right) \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \lambda_2 \mu_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^3}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^2 \partial \mathrm{Y}}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X} \partial \mathrm{Y}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Y}_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^3}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}^2 \partial \mathrm{Y}}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X} \partial \mathrm{Y}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Y}^3}\right) \end{matrix} \right\| ,$$

où F désigne la transformée de f, c'est-à-dire

$$f(\lambda_1 \mathrm{X} + \lambda_2 \mathrm{Y} \; , \; \mu_1 \mathrm{X} + \mu_2 \mathrm{Y}) \; ;$$

et la dernière matrice ci-dessus est à son tour le produit de la matrice initiale par

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1^3 & \lambda_1^2\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 3\lambda_1^2\mu_1 & 2\lambda_1\lambda_2\mu_1 + \lambda_1^2\mu_2 & 2\lambda_1\lambda_2\mu_2 + \mu_1\lambda_2^2 & 3\lambda_2^2\mu_2 \\ 3\lambda_1\mu_1^2 & \mu_1^2\lambda_2 + 2\lambda_1\mu_1\mu_2 & \lambda_1\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2\lambda_2 & 3\lambda_2\mu_2^2 \\ \mu_1^3 & \mu_1^2\mu_2 & \mu_1\mu_2^2 & \mu_2^3 \end{matrix} \right\| .$$

Dans cet exemple donc, la transformée s'obtient en multipliant la matrice initiale à *droite* et à *gauche* par des tableaux carrés ne contenant que les éléments de la substitution. Pour le cas particulier du polynôme de degré 4 (ou en général n), les dérivées partielles sont, à un facteur constant près, les coefficients et l'on obtient une propriété de matrices invariantes signalées par nous dans l'*Enseignement mathématique* (1910).