

DEUX RÉCENTS OUVRAGES DE GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Buhl, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18020>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DEUX RÉCENTS OUVRAGES DE GÉOMÉTRIE

PAR

A. BUHL (Toulouse).

C'est uniquement à propos de deux récents Ouvrages, dus, l'un à Gaston DARBOUX¹, l'autre à M. Maurice d'OCAGNE², que ces quelques pages sont écrites. Il ne s'agit pas de faire, de manière originale, une nouvelle apologie des vues générales que des savants français ont eues sur la Géométrie proprement dite, mais il semble excellent de signaler avec quelle facilité chacun pourra s'y initier ou se les remémorer rien qu'en prenant pour guides les deux Ouvrages en question.

Susceptibles d'être éloquemment rapprochés quant à la manière dont ils peuvent se compléter l'un l'autre, une coïncidence fortuite les a fait paraître la même année, en 1917. Représentant l'un un enseignement de la Sorbonne, l'autre un enseignement de l'Ecole polytechnique, établissements opposés parfois l'un à l'autre dans un esprit de rivalité où l'on ne peut voir heureusement que de l'émulation, ils résument deux courants issus des sources les plus hautes et sont manifestement appelés à donner une orientation nouvelle aux cours des Facultés et des classes de Mathématiques spéciales.

Beaucoup de choses tendent à réunir les deux livres. Si nous ouvrons d'abord celui de M. G. Darboux, nous lisons, sous le titre du premier chapitre, que « le but de ces Leçons est l'exposé des principes sur lesquels reposent les décou-

¹ *Principes de Géométrie analytique*, 1 vol. in-8° de vi-520 p. et 27 fig. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 20 fr.

² *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole polytechnique*. Tome I. Vol. in-8° de xii-375 p. et 135 fig. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 16 fr.

vertes qu'on doit à Monge et à son école ». Mais si Monge, dans un ouvrage magnifique, a merveilleusement appliqué l'Analyse à la Géométrie, il est aussi le créateur de la Géométrie descriptive; sa synthèse, son intuition des tracés ne furent inférieurs en rien aux productions de son analyse. Il est aussi grand maître en Géométrie analytique et en Géométrie pure appliquée ou non. Si G. Darboux se réclame de Monge, comment imaginer que le patronage d'un des fondateurs de l'Ecole polytechnique ne soit accepté, par M. d'Ocagne, avec le même et fécond enthousiasme !

*
* * *

La clarté exige, en général, qu'on ne parle point de deux livres à la fois en les entremêlant page à page. Mais, en ce qui concerne les débuts de ceux-ci, c'est plutôt la séparation qui serait maladroite tant ils s'inspirent, avec un même bonheur, des mêmes idées générales qui, appliquées à des exemples différents, se renforcent singulièrement du fait de ces deux expositions dont chacune est également originale.

L'idée fondamentale est celle de transformation; la transformation la plus simple ne fait appel qu'aux formules du premier degré; elle est *homographique*. Elle change les droites en droites en conservant le *rapport anharmonique* de quatre points alignés. Voilà, dira-t-on, qui est banal et fixé depuis fort longtemps! Eh bien, il y a peut-être déjà beaucoup à dire, beaucoup à approfondir, beaucoup à lier avec les régions les plus modernes de la Science.

Quelle est l'origine intime du rapport anharmonique? Le fait de juger cette notion par son extraordinaire fécondité ne masque-t-il pas la genèse que M. Darboux tient à révéler tout d'abord?

A quatre points alignés, A, B, M, M', attribuons les coordonnées homogènes

$$\begin{array}{cccccc}
 x & , & y & , & z & , & t & , & (A) \\
 x' & , & y' & , & z' & , & t' & , & (B) \\
 x + \lambda x' & , & y + \lambda y' & , & z + \lambda z' & , & t + \lambda t' & , & (M) \\
 x + \lambda' x' & , & y + \lambda' y' & , & z + \lambda' z' & , & t + \lambda' t' & , & (M')
 \end{array}$$

On aura

$$\frac{MA}{MB} = -\lambda \frac{t'}{t}, \quad \frac{M'A}{M'B} = -\lambda' \frac{t'}{t}.$$

On voit que de tels rapports, même s'ils sont géométriquement invariables de par la fixité des points A, B, M, M', varient de par le choix des notations; *il n'en sera plus de même pour le quotient de ces rapports*, quotient qui ne dépend plus du multiplicateur $t':t$.

Et ce qui vient de naître sous les traits d'une telle invariance, c'est précisément le rapport anharmonique! Peut-être y a-t-il là l'exemple le plus élémentaire d'une genèse qui se présente dans les parties les plus élevées des Mathématiques. Des fonctions elliptiques, fuchsiennes, etc., révèlent précisément leurs si remarquables propriétés exactes comme quotients de fonctions Θ à multiplicateurs se détruisant dans la division.

Mais ne nous éloignons pas du rapport anharmonique qui, défini à l'aide de segments réels, va faire un bond merveilleux dans le domaine imaginaire.

Un angle $AOB = \omega$, ayant son sommet joint aux ombilics I et J de son plan donne ainsi un faisceau O. ABIJ de rapport anharmonique $e^{2i\omega}$. C'est là une remarque faite par Laguerre alors qu'il n'était que candidat à l'Ecole polytechnique; il ne fallait qu'y penser tant la démonstration est simple, élémentaire, immédiate. C'est la possibilité d'étendre aux angles les transformations et démonstrations projectives tant travaillées par Chasles et Poncelet. C'est la porte ouverte sur les géométries non euclidiennes qui naîtront dès que l'on remplacera l'ensemble des points I et J par une conique quelconque. Et cependant, au point de vue didactique, cette si remarquable définition de l'angle n'avait été accueillie jusqu'ici qu'avec une réserve véritablement injuste. E. Duporcq lui avait donné sa véritable place dans ses *Premiers principes de Géométrie moderne*, mais, parmi les collègues immédiats du jeune géomètre si prématurément disparu, personne n'en avait fait une des bases fondamentales d'un ouvrage pédagogique. C'est chose faite maintenant et,

quant à cette introduction dans l'enseignement, G. Darboux et M. d'Ocagne sont admirablement d'accord.

Enormément de choses resteraient à dire quant au développement immédiat de tels préliminaires. Forcé d'être très bref, je signalerai seulement les coordonnées tétraédriques maniées par Plücker et Möbius sans adjonction essentielle à ce qu'on peut tirer de l'homographie générale. La dégénérescence de l'homographie en homologues, les transformations dualistiques, sont ici et resteront toujours les plus vivants exemples de ces transformations qui relèvent autant de l'Analyse que de la Géométrie, puisque pour en saisir complètement toute la puissance et toute la profondeur, il a fallu poursuivre dans le champ imaginaire tous les concepts nés d'abord dans le domaine réel.

* * *

Séparons maintenant deux Ouvrages qui, d'accord sur les points de départ, ont envisagé des problèmes différents. Voyons d'abord celui de Gaston Darboux.

La Seconde Partie est intitulée : Définitions métriques.

Un concept des plus ingénieux consiste, étant donnés deux points quelconques, A et B, à considérer le quadrilatère ABIJ où I et J sont toujours les points cycliques du plan; en tant que quadrilatère complet, celui-ci a deux autres sommets A' et B'.

Avec ces segments *associés* AB et A'B', la définition de l'angle due à Laguerre et de faciles calculs d'exponentielles imaginaires, on reconnaît que les deux propriétés du cercle, comme lieu d'un point d'où l'on voit une corde sous un angle donné et comme lieu d'un point dont les distances à deux points fixes sont en rapport constant, sont associables d'une manière telle qu'on peut découvrir des courbes, de tous les degrés, où ces propriétés sont considérablement généralisées.

De telles considérations sont aisées à transporter du plan à la sphère. Si, sur cette dernière surface, on met en évi-

dence les génératrices rectilignes imaginaires, au moyen des formules bien connues

$$x = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad y = i \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta},$$

tout déplacement de la sphère sur elle-même revient à une même substitution linéaire effectuée sur α et β , soit, par exemple,

$$\alpha_1 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}, \quad \beta_1 = \frac{m\beta + n}{p\beta + q}.$$

De ce théorème, dû à Cayley, on peut encore s'élancer dans les plus hautes régions de l'Analyse. Des substitutions linéaires en litige on s'élève aux groupes et aux fonctions polyédriques, proches parents des groupes et fonctions modulaires, des groupes fuchsien et des fonctions fuchiennes de Poincaré. Et comme des substitutions linéaires de même structure définissent l'homographie rectiligne avec toutes ses belles conséquences intuitives et constructives qu'on considère d'ordinaire comme appartenant à la Géométrie absolument pure, on est saisi d'une admiration sans bornes en constatant que ces diverses régions des Mathématiques se lient et se déroulent derrière les substitutions du type si simple

$$z_1 = \frac{mz + n}{pz + q}.$$

Les points *associés*, signalés tout à l'heure dans le plan, se retrouvent aisément sur la sphère, car deux génératrices imaginaires passant par A et deux autres, passant par B, forment un quadrilatère. De cette méthode des points associés on conclut aussi, sur la sphère, des courbes analogues aux courbes algébriques planes qui présentaient une généralisation des deux propriétés fondamentales du cercle indiquées plus haut.

La Troisième Partie de l'œuvre de G. Darboux est consacrée aux théorèmes de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques. C'est un sujet intimement lié aux précédents, car les génératrices rectilignes, réelles ou

imaginaires, d'une quadrique donnent, par perspective, des tangentes à une conique. Toutefois, cette remarque faite, il semble préférable d'étudier les choses, dans le plan même de la conique, au moyen d'un système de coordonnées qui permet d'étendre certains théorèmes à la Poncelet aux cubiques et même à des courbes algébriques de degré quelconque.

De ces préliminaires on passe à l'équation d'Euler et aux théorèmes, tels que ceux de Graves et de Chasles, où interviennent des arcs d'ellipse, mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que tout ceci peut contribuer à la théorie des fonctions elliptiques, sans en être issu. Ce point de vue est celui avec lequel Halphen commençait déjà son *Traité*; nous le retrouverons encore, tout à l'heure, dans le Cours de M. Maurice d'Ocagne.

Gaston Darboux, dans une Quatrième Partie, traite de la Géométrie cayleyenne.

Nous avons déjà vu comment Laguerre considérait l'angle qui, en Géométrie ordinaire, reste cependant séparé de la notion de distance. Il n'en est pas de même en Géométrie sphérique, les distances sphériques étant aussi des angles. Or une perspective, centrée comme la sphère, permet de définir, dans le plan, des *distances* analogues aux distances sphériques. On imagine alors aisément une quadrique quelconque, dite *absolue*, qu'une droite AB coupe en M et N et qui permet de définir la distance AB par le logarithme du rapport anharmonique des points A, B, M, N. De même l'angle de deux plans P et Q, d'intersection Δ , si l'on mène par Δ deux plans tangents U et V à l'absolu, est défini par le logarithme du rapport anharmonique des plans P, Q, U, V.

La Géométrie cayleyenne ainsi constituée permet aisément de descendre aux Géométries non-euclidiennes. Elle admet des déplacements et une Trigonométrie générale revenant aussi à des combinaisons simples de substitutions linéaires; elle a ses aires et ses volumes correspondant à l'invariance d'intégrales doubles ou triples.

L'œuvre se termine avec une Cinquième Partie consacrée à l'inversion.

Un des points préliminaires et fondamentaux est relatif à la définition des focales d'une surface, laquelle généralise la définition de Plücker concernant les foyers des courbes planes. Les focales sont les lignes doubles d'une développable circonscrite à la fois à la surface et au cercle imaginaire de l'infini. La notion de développable isotrope joue également un rôle puissant et curieux, mais ce sont les merveilleuses coordonnées pentasphériques qui constituent, à coup sûr, le meilleur moyen d'investigation analytique à associer à l'inversion. Les coordonnées tétraédriques se peuvent facilement interpréter en associant à un point ses distances à quatre plans; de même les coordonnées pentasphériques font intervenir les puissances d'un point par rapport à cinq sphères; elles donnent entre sphères quelconques des formules analogues à celles de la Géométrie analytique ordinaire entre plans.

C'est ici qu'apparaissent des surfaces de quatrième degré aux propriétés extrêmement nombreuses: les cyclides. Étudiées, au point de vue analytique, par Gaston Darboux, au point de vue géométrique par G. Humbert, on peut très simplement les considérer comme enveloppes de sphères; ce sont peut-être les seules surfaces du quatrième degré, de quelque généralité, que l'on puisse étudier profondément en coordonnées cartésiennes. En coordonnées pentasphériques elles sont du second degré et se laissent alors si complètement manier comme des quadriques, qu'on peut construire un système triplement orthogonal formé de cyclides tout comme on construit le système élémentaire formé de quadriques véritables.

C'est tout particulièrement dans cette dernière Partie que l'on retrouvera presque tout ce que G. Darboux avait déjà publié, en 1872, dans un Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la Théorie des imaginaires*, Ouvrage déjà si remarquable qu'il en était devenu rarissime malgré une réimpression effectuée en 1896.

Revenons maintenant au livre de M. Maurice d'Ocagne.

Il faut une grande originalité d'esprit pour occuper dignement la chaire de Géométrie de l'Ecole polytechnique. Les besoins pratiques sont impérieux quant à tout ce qui se traite sur épure, mais beaucoup de mathématiciens considèrent cela comme un domaine géométrique monotone où la découverte soudaine et sensationnelle d'un brillant théorème ne semble pas pouvoir être espérée. La conception, nous le verrons plus loin, est peut-être étroite mais, quoi qu'il en soit, les professeurs de l'Ecole ont élargi le champ. Amédée Mannheim, par exemple, s'illustra avec la Géométrie cinématique. Est-il besoin de rappeler que M. d'Ocagne est un créateur en matière de Nomographie ? Les développements nomographiques sont surtout réservés à un Tome II, mais déjà le Tome I, aujourd'hui publié, contient de nombreuses amorces à ce sujet; les préliminaires relatifs aux transformations en témoignent.

Quant aux transformations pratiques, il fallait naturellement faire une grande place à la perspective. Il est clair que le trait de perspective doit pouvoir résoudre toutes les questions susceptibles d'être rattachées au trait de descriptive, mais c'est surtout là une remarque théorique; la perspective a ses méthodes qui demandent quelque étude pour elles-mêmes. Et il semble qu'en rattachant à la perspective des questions plus ordinairement traitées en descriptive, l'auteur a fait montre d'une première originalité.

Il montre l'importance de la perspective *axonométrique* en laquelle l'objet à représenter est lié à trois axes rectangulaires qu'on projette avec lui. Puis, par des positions plus particulières de ces trois axes, la perspective devient *isométrique* et enfin *cavalière*. J'imagine que des lecteurs n'ayant point la patience de faire des épures, peuvent cependant être grandement intéressés par l'élégance avec laquelle de telles vues procèdent du général au particulier.

Parmi les questions les plus ingénieusement traitées, je signalerai le contour apparent de la sphère (p. 61), la mise en perspective du cône circulaire (p. 71), l'image d'un point dans un miroir quelconque (p. 81), l'ombre intérieure à un

cylindre circulaire (p. 85). Le problème de la restitution comprend comme cas particulier mais d'une importance pratique capitale, la Métrophotographie du Colonel Laussedat.

La Première Partie de l'Ouvrage ayant été consacrée aux Transformations géométriques, notons que tout ce qui concerne la Perspective et forme une Seconde Partie, n'occupe que 78 pages; c'est d'une condensation fort heureuse, qui conserve l'entière beauté des méthodes sans les disperser sur une multiplicité d'exemples empruntés à la pratique.

Une Troisième Partie est consacrée à la Géométrie infinitésimale.

Dans la transformation infinitésimale des figures planes, l'un des résultats les plus importants est dû au Colonel Mannheim; il lie les six normales aux trajectoires des sommets et aux enveloppes des côtés d'un triangle variable de position et de forme. Avec quelques brefs développements sur la variation de longueur d'un segment, on peut aborder la courbure des coniques et des tractrices, les théorèmes de Graves et de Chasles sur les arcs d'ellipse, la courbure des caustiques et des podaires. A cette Géométrie différentielle, on peut adjoindre sans peine certains résultats concernant les aires, par exemple l'aire de la couronne détachée dans une courbe fermée par un point marqué sur une corde de longueur constante.

Beaucoup d'éléments différentiels obtenus par les méthodes précédentes peuvent s'annuler de manière simple ou symétrique, d'où de très élégants théorèmes de maximum ou de minimum.

Dans l'étude des surfaces développables, M. d'Ocagne arrive au développement en suivant attentivement la déformation de l'arête de rebroussement.

L'étude de la courbure d'une surface autour d'un de ses points comporte des résultats d'une simplicité étonnante et cependant peu connus. Ainsi Mannheim et l'auteur lui-même ont donné une formule liant la courbure d'un contour apparent et la courbure d'une surface en l'un des points de contact avec le cylindre projetant.

Très élégante démonstration géométrique pour le théo-

rème de Malus et de Dupin sur les faisceaux de rayons qui, avant et après réfraction sur une surface quelconque, admettent des surfaces qui leur sont orthogonales. Puis digression des plus utiles sur la notion même de courbure superficielle ; sur une surface, l'idée de courbure a quelque chose d'arbitraire, et différentes définitions semblent généraliser dans des voies diverses la notion qui est si simple pour une courbe plane. C'est ce que montre, par exemple, la courbure moyenne quadratique de Casorati, aisée à adjoindre et à comparer aux courbures moyenne et totale d'aspects beaucoup plus classiques.

Les lignes tracées sur les surfaces nous conduisent aux lignes de courbure dans les systèmes triplement orthogonaux, aux asymptotiques et à leur courbure régie par le théorème de Beltrami, surtout à ces admirables géodésiques qui permettent de généraliser la Géométrie plane sur une surface quelconque. Les lignes de courbure de l'ellipsoïde, si simplement déterminées déjà en faisant entrer cette surface dans le système triple orthogonal bien connu, sont aussi facilement déterminées comme coniques géodésiques à foyers aux ombilics de la quadrique.

Soyons brefs pour la théorie des surfaces gauches en nous bornant à signaler une représentation géométrique du paramètre de distribution due encore à Mannheim.

Le conoïde de Plücker ou cylindroïde, étudié par MM. Appell, Bricard, d'Ocagne, est un exemple sans rival possible.

Après les surfaces réglées il était naturel de placer ces multiplicités rectilignes plus vastes que constituent complexes et congruences. D'où une Quatrième Partie consacrée à la Géométrie réglée. Le complexe linéaire y tient naturellement la place principale avec ses propriétés de polarité qui offrent une curieuse analogie avec les propriétés de polarité des quadriques ; il s'aperçoit aisément, en bloc, comme formé par l'ensemble des binormales d'un ensemble d'hélices circulaires de même axe et de même pas.

La Cinquième et dernière Partie du volume concerne la Géométrie cinématique.

Cette science si captivante entrevue par Cauchy, précisée par Chasles avec la notion du centre instantané, doit encore ses plus admirables développements au Colonel A. Mannheim.

Les *Principes et développements de Géométrie cinématique* constituent l'un des plus beaux Ouvrages dont puissent se glorifier la Science française et l'École polytechnique.

M. d'Ocagne a réussi une exposition fort originale et esthétique; ainsi il est banal d'étudier les trajectoires elliptiques des points d'un segment dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires, mais on voit, avec un vif intérêt, qu'on peut rattacher à cette question la construction d'une conique déjà rencontrée en Perspective.

Quant au mouvement plan le plus général, il aboutit surtout au théorème de Savary qui lie la courbure d'une trajectoire aux courbures de la courbe roulante et de la courbe rail. Ce théorème est ensuite appliqué et mis en valeur dans le cas des épicycloïdes; pour ces courbes, le lieu des centres de courbure des éléments de trajectoire correspondant aux différents points du cercle roulant est lui-même un cercle, et les développées sont aussi des épicycloïdes. L'auteur a d'ailleurs publié des recherches originales sur ces théorèmes et d'autres de même genre dans une *Etude géométrique* toute récente (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1915, p. 533).

L'exposition est encore d'une clarté particulièrement saisissante dans le déplacement d'un solide par roulement et glissement d'une surface réglée mobile sur une surface réglée fixe. Dans le déplacement instantané, dans la *viration*, toutes les normales possibles aux trajectoires de la figure en mouvement forment un complexe linéaire attaché à un ensemble instantané d'hélices, complexe qui est précisément celui signalé plus haut et étudié dans la Géométrie réglée. Les Géométries cinématique et réglée sont ainsi vivement éclairées l'une par l'autre et à propos d'une question fondamentale. On s'élève de là à des complexes non linéaires formés par les tangentes aux trajectoires et par les caractéristiques des plans en mouvement, mais ils se confondent

avec le complexe des droites telles que leurs conjuguées, par rapport au complexe linéaire précédent, leur soient rectangulaires.

Aux mouvements à deux degrés de liberté correspondent des surfaces trajectoires dont l'ensemble des normales est une congruence linéaire commune aux complexes linéaires correspondant respectivement à deux virations particulières. On en conclut immédiatement que ces normales, pour chaque position de la figure, rencontrent deux droites; c'est le théorème de Schönemann et Mannheim.

Diverses surfaces hélicoïdales illustrent la théorie des mouvements spatiaux; vient ensuite la surface de l'onde non sans des préliminaires très généraux sur la cinématique des surfaces apsidales.

Diverses Notes terminent l'ouvrage.

Dans des *Notions complémentaires sur les transformations géométriques*, sont adjointes aux transformations linéaires et à l'inversion étudiées dans le corps du volume des transformations analytiques plus générales, notamment des transformations quadratiques. Pour des quadriques quelconques les représentations planes sont aisées; pour les surfaces cubiques la chose ne saurait être sans droites existant sur la surface, et c'est en approfondissant cette remarque qu'on peut arriver à mettre en évidence toutes ces droites qui, on le sait, sont au nombre de 27.

Avec la Note *Sur un procédé de mise en perspective sans lignes de construction*, il y a vraiment de quoi s'étonner et s'émerveiller. Sur une épure, des faisceaux homographiques, par certains rayons imaginaires, révèlent des rotations qui résolvent alors immédiatement un problème de perspective! C'est d'une synthèse admirable et qui montre bien qu'il n'y a plus lieu de distinguer la Géométrie pratique et monotone des atlas, de la Géométrie analytique la plus abstraite; tout cela est la Géométrie! Et soyons reconnaissants à M. d'Ocagne qui a poussé loin l'art de nous le faire comprendre.

On pourrait d'ailleurs en dire autant quant à une troisième Note *Sur un procédé de restitution perspective fondé sur l'homologie*; ici, dans un problème cartographique, des points

éminemment réels sont maniés comme intersections de droites isotropes.

Pour Gaston Darboux, l'imaginaire doit jouer, en Géométrie comme en Analyse, un rôle explicatif fondamental. M. d'Ocagne nous montre, en outre, que dans des problèmes géométriques, indéniablement tenus d'avoir des solutions réelles, les notions imaginaires peuvent jouer un rôle intermédiaire des plus pratiques. Une telle assertion serait banale en Analyse mais combien elle est plus neuve dans le domaine des épures !

Des *Exercices complémentaires relatifs à la Géométrie infinitésimale des courbes planes* exposent les élégantes recherches de M. d'Ocagne sur les adjointes infinitésimales à une courbe donnée. Ces adjointes sont telles que la connaissance d'infiniment petits du $(n - 1)^{\text{me}}$ ordre y relatifs définit les infiniment petits du n^{me} ordre relatifs à la courbe primitive. C'est ainsi qu'on peut avoir des propriétés de courbure relatives à une certaine courbe connaissant des propriétés des tangentes ou des normales de la courbe adjointe.

Une cinquième et dernière Note *Sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale*, montre encore le secours que les remarques géométriques peuvent apporter quant à l'évaluation de certaines intégrales.

Après de telles citations il serait superflu de faire un effort de style pour écrire quelque conclusion grandiose. Félicitons-nous, très simplement, d'avoir vu paraître ensemble deux Ouvrages où apparaît si clairement le génie propre à cette science géométrique dont les plus beaux développements sont dus à des géomètres français.
