Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES GAUCHES AVEC APPLICATION A LA PARABOLE CUBIQUE

Autor: Loria, Gino

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18021

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REMARQUES
SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES GAUCHES AVEC APPLICATION A LA PARABOLE CUBIQUE

PAR

Gino LORIA (Gênes).

Pour se former une idée exacte de la forme qu'a une ligne à double courbure, dont on connaît la génération et par suite la représentation analytique, on a en général recours aux méthodes de la Géométrie descriptive. Toutefois, pour bien comprendre les épures que cette science apprend à construire, il est nécessaire, et pas toujours suffisant, une habitude considérable; par conséquent on peut penser que le but en question peut être atteint d'une manière plus rapide et plus sûre en traçant réellement dans l'espace les lignes dont on veut se procurer une image précise. Mais comme les physiciens et les chimistes jusqu'à présent ne nous ont appris aucun procédé pour « dessiner dans l'espace », les mathématiciens doivent chercher un expédient dans l'ensemble de leurs outils; et que cette recherche ne soit pas stérile, est prouvée par les lignes suivantes.

Considérons la courbe Γ qui, à l'aide de coordonnées cartésiennes orthogonales, a cette représentation paramétrique:

$$x = \varphi(t) \ , \qquad y = \psi(t) \ , \qquad z = \chi(t) \ . \tag{1}$$

Soient Γ_x, Γ_y, Γ_z ses projections orthogonales sur les plans yz, zx, xy. Γ_z, par exemple, est la base d'un des cylindres qui projettent la courbe; si nous développons ce cylindre sur un plan, la courbe Γ subira une déformation et deviendra une courbe $[\Gamma]$ parfaitement déterminée. Pour

définir cette courbe, nous la rapporterons à un système cartésien orthogonal ayant pour axe des abscisses de ligne Γ_z rectifiée et pour origine un, Ω, de ces points choisis arbitrairement. Alors la première coordonnée du point [P] transformée d'un point quelconque P de la courbe Γ sera donnée par la fonction

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \omega(t) , \qquad (2)$$

l'intégrale étant prise de manière que s soit $= 0$ au point Ω; tandis que la seconde coordonnée sera égale $\xi(t)$. Par suite la courbe [Γ] rapportée à un système cartésien peut se représenter par les équations :

$$\xi = \omega(t) , \qquad \eta = \chi(t) . \qquad (3)$$

A l'aide de ces formules la courbe [Γ] pourra être tracée sur le plan. Si, cette opération finie, on replace le cylindre projetant dans sa position originaire, la ligne [Γ] redeviendra Γ et la question que nous avons énoncée au début sera résolue. Dans la pratique, il est bon de tracer la courbe Γ_z sur une table de bois comme un sillon qui la traverse complètement et de dessiner la courbe [Γ] sur une lame de métal très mince et très flexible; alors l'opération de replacement dont nous avons parlé n'offrira d'obstacles insurmontables.

Mais il y a une autre espèce de difficulté qui empêche bien souvent d'appliquer la méthode dont il s'agit; c'est la détermination de la fonction $\omega(t)$, car en général elle n'appartient à aucune classe connue et, même dans les cas où cela arrive, c'est une fonction si compliquée, qu'il est parfois impossible de tracer avec la précision nécessaire la courbe [Γ].

Entre les cas où cette difficulté peut être vaincue il y en a un qui me paraît digne de remarque, car il se rapporte à la plus simple des courbes gauches algébriques et car il offre une application de la plus ancienne des courbes planes algébriques rectifiables à l'aide d'expressions aussi algébriques : je parle de la cubique gauche osculatrice du plan à l'infini (ou *parabole cubique*) et de la parabole de Neil.

Pour démontrer tout cela, il est nécessaire de se rappeler que la plus simple des paraboles cubiques peut se représenter, si on la rapporte à un système cartésien orthogonal, par les équations suivantes :

$$x = t^3 , \qquad y = t^2 , \qquad z = t . \tag{4}$$

Par suite, ses projections sur les trois plans de repère sont les courbes :

$$x^2 = y^3 , \qquad x = z^3 , \qquad y = x^2 ;$$

or on sait que les deux dernières ne peuvent être rectifiées algébriquement, tandis que, au contraire, cela est possible par rapport à la première.

En effet, on peut encore la représenter par les équations

$$x = t^3 , \qquad y = t^2 ;$$

par suite on a

$$ds = t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt ;$$

changeons de variable, en posant

$$\sqrt{9t^2 + 4} = 3u$$

et nous aurons

$$ds = 3u^2 du$$

et

$$s = u^3 + \text{const.} = \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{const.}$$

Si nous supposons qu'on ait $s = 0$ pour $t = 0$, la const. doit être $= -\frac{8}{27}$, et alors

$$s = \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} .$$

Tout cela prouve que la courbe [Γ] transformée par développement de la parabole cubique Γ est représentable par les formules

$$\xi = \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} , \qquad \eta = t ;$$

par suite elle a l'équation suivante :

$$\left(\xi + \frac{8}{27}\right)^2 = \left(\eta^2 + \frac{4}{9}\right)^3. \tag{5}$$

C'est donc une courbe du 6e ordre qui passe par l'origine des coordonnées. Si on change un des axes en se servant des formules

$$\xi + \frac{8}{27} = \xi', \qquad \eta = \eta'$$

on a, au lieu de l'équation (5), la suivante :

$$\xi'^2 = \left(\eta'^2 + \frac{4}{9}\right)^3;$$

cette équation prouve que la courbe [Γ] est symétrique par rapport aux nouveaux axes ; à toute valeur réelle de η' il correspond un couple de valeurs réelles de ξ', d'où il suit que le point à l'infini de $\Omega'\xi'$ est un point quadruple (les correspondantes tangentes coïncident avec la droite de l'infini du plan) ; et à toute valeur réelle de ξ', satisfaisant à la relation $|\xi'| > \frac{8}{27}$, on a deux valeurs réelles de η'. La courbe (comme le montre la fig. 1) a donc à peu près l'apparence d'un couple de paraboles tournant leurs convexités l'une à l'autre et symétriques entre elles par rapport à $\Omega'\eta'$.

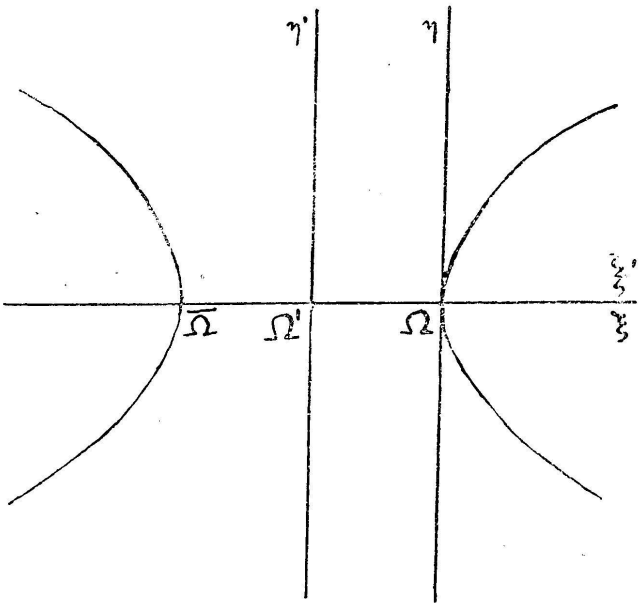

Fig. 1.

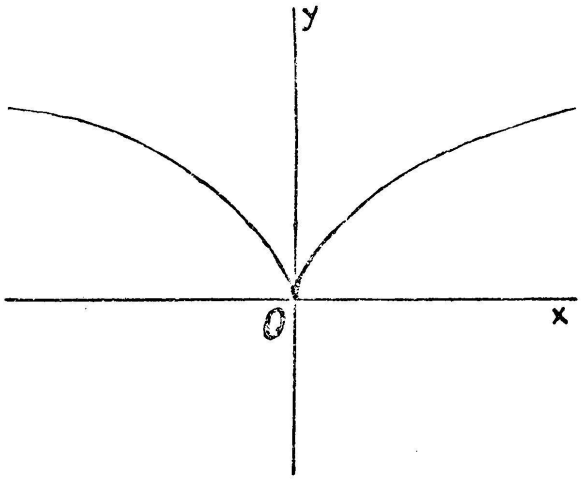

Fig. 2

Remarquons d'ailleurs que la parabole semicubique $x^2 = y^3$ est une courbe de troisième ordre, toute située au-dessus de l'axe Ox, symétrique par rapport à Oy et dont l'origine est un point d'arrêt (voir fig. 2) ; on a de la sorte tous les éléments pour se former une idée de la forme qu'a la parabole cubique : cette courbe s'obtiendra en plaçant le plan $\xi\Omega\eta$ normalement au plan xOy de manière que Ω tombe en O et la droite $\Omega\xi$ se superpose à la parabole semicubique.

Un procédé parfaitement semblable peut s'appliquer à toute courbe gauche dont la projection orthogonale sur un plan convenablement choisi soit rectifiable par des fonctions simples.

Gênes, octobre 1917.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA TOUPIE GYROSCOPIQUE

PAR

M. Zack (Odessa).

Parmi les théories de la Mécanique, il y en a peu qui aient conduit à un plus grand nombre d'applications directes que la théorie du mouvement gyroscopique. En balistique, en aéronautique, dans la construction des machines et des navires il a été possible, grâce au développement de cette théorie, d'introduire des perfectionnements qui ont eu une influence quelquefois décisive sur l'évolution de ces diverses branches de l'art de l'ingénieur. Pourtant, la plupart des théories soi-disant élémentaires du phénomène gyroscopique sont ou fausses ou, au moins, inexactes. Quelques-unes seulement permettent d'obtenir des résultats purement qualitatifs.