Supplément au N° 6 du Tome XX (1918-1919)

Spécimen de langue internationale *Espérantide* (conciliation de l'Esperanto et de l'Ido), offert par l'auteur en hommage aux lecteurs de *L'Enseignement Mathématique.*[1]

SPACO

DA

René de SAUSSURE (Bern, Swislando).

I. LA SEP FUNDAMENTAN FIGURON.

En spaco existas sep, kay nur sep, figuron, kiun estas nur pozician, t. e., kiun entenas nenia grando. Lu estas (fig. 1):

1. La *punkto (P).* Irg ni punkto estas nura pozicio kay havas neni amplexo; punkto povas rotaci omnimanere sur si self, ne cestante esti la sama punkto.

2. La *reglo (R),* or rekta senfina linio, konsiderata kom spacelemento, kom nedivizibla tuto (kay ne kom serio de punkton). Irg ni reglo estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; reglo povas gliti or rotaci sur si self, ne cestante esti la sama reglo.

3. La *edro (E),* or senlima plano, konsiderata kom spacelemento, kom nedivizibla tuto (kay ne kom surfaco de punkton). Irg ni edro estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; edro povas gliti omnimanere sur si self, ne cestante esti la sama edro.

4. La *sago,* or figuro *PR,* konsistanta el un punkto *P,* ligita al sur un reglo *R.* Punkto *P* estas la *origino,* kay reglo *R* la *stango,* de la sago; ti stango posesas senso plusa (indikata per sagpinto sur fig. 1) kay senso minusa. Irg ni sago estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; sago povas rotaci cirker sia stango ne cestante esti la sama sago.

5. La *shildo,* or figuro *PE,* konsistanta el punkto *P* ligita al sur un edro *E.* Punkto *P* estas la origino, kay edro *E* la *folio,* de la shildo; ti folio havas supro (indikata per signo +) kay infro (indikata per signo —). La ye edro *E,* en *P* starigita, ortanto estas la *axo* de la shildo. Irg ni shildo estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; shildo povas rotaci cirker sia axo, ne cestante esti la sama shildo.

6. La *flago,* or figuro *RE,* konsistanta el un reglo *R* ligita al sur un edro *E* (tio signifas, ke reglo *R* estas rekta linio markita en la plano de la edro *E).* Reglo *R* estas la stango de la flago; ti stango havas senso plusa (indikata per sagpinto) kay senso minusa. Edro *E* estas la folio de la flago; ti folio posesas supro k. infro. Irg ni flago estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; flago povas gliti paralele al sia stango, ne cestante esti la sama flago.

[1] Pour tous renseignements concernant la langue internationale *Espérantide* s'adresser au *Centra Oficeyo,* 10 Hôtelgasse, Berne.

7. La *folyeto*, or figuro *PRE*, konsistanta el un punkto *P*, ligita al sur un reglo *R*, siavice ligita al sur un edro *E*. Punkto *P* estas la origino, reglo *R* la stango, kay edro *E* la folio, de la folyeto; la stango havas antro (indikata per sagpinto) kay postro, kay la folio havas supro kay infro (indikatan per la signon + kay —). Irg ni folyeto estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; folyeto ne povas gliti sur si self; el tio seqas, ke se al folyeto *PRE* oni ligas irg nia rigida korpo *K*, la pozicio de ti folyeto plene konigos tiu de la korpo *K*.

La sistemon de rigidan korpon (korparon) estas do reduktiblan al sistemon de folyeton (folyetaron); or, se oni preferas, folyeto estas nenio alia, ol, kio restas, kiam de ni rigida korpo oni forprenas la formo k. la grando.

Resume, el la sep fundamentan pozici-figuron tri estas figuron unelementan (punkto, reglo, edro), tri estas duelementan (sago, shildo, flago), kay un estas trielementa (folyeto).

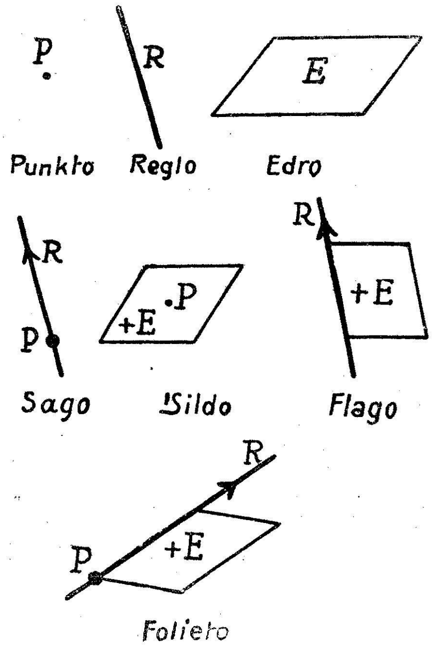

Fig. 1. — La sep fundamentan figuron

II. Difinon.

Poliserio estas pluropple infinita serio de figuron identan, or almeyne samspecan; seqe:

unopla serio,	enhavanta	∞^1	elementan	figuron,	nomivos	*monoserio*
duopla	„	∞^2	„	„	„	*biserio*
triopla	„	∞^3	„	„	„	*triserio*
qaropla	„	∞^4	„	„	„	*tetraserio*
&c.						&c.

Exemple, punktlinio estas monoserio de punkton (or punktara monoserio), punktsurfaco estas biserio de punkton, reglosurfaco estas monoserio de reglon (or reglara monoserio), komplexo estas reglara triserio, &c.

Du figuron estas *inversan*, kiam lu estas simetrian una ye la alia relate al ni punkto.

Du figuron estas *kontran*, kiam lu estas simetrian una ye la alia relate al ni reglo.

Du figuron estas *reflektan*, kiam lu estas simetrian una ye la alia relate al ni edro.

Du figuron estas *reciprokan*, kiam lu estas inter su ligatan tiamanere, ke una el la du figuron naskas *lineara* poliserio relate al la alia.

Omni speco de geometrio estas fondata sur la reciprokrelato, kiu existas inter du figuron. Kiam tin figuron estas identan, la koresponda geometrio nomivos geometrio *unsexa;* kiam lu estas malsaman, ji nomivos *dusexa*.

III. La tridimensia spaco.

La tridimensia spaco havas strukturo duala, or, se oni preferas, dusexa, kar omnitempe k. omniloke oni bezonas du fundamentan grandon por mezuri spaco: la *longo* k. la *angulo*. Tin grandon estas nereduktiblan una ye la alia; lu estas *geandran* grandon kay oni povas diri, almeyne figure, ke la unma estas vira, dur ke la duma estas virina.

Al la longo korespondas la *punkto,* kar longo estas la grando kushanta inter du punkton (dupunkta longo). Al la angulo korespondas la *edro,* kar angulo estas la grando kushanta inter du edron (duedra angulo).

La figuro formita da du punkton P, P', nomivas *dupunkto,* or *punktparo*. La figuro formita da du punkton P, P', kay da la rektopeco PP' nomivas *dupunktlongo,* or *segmento*. Fine la longo PP', kushanta inter du punkton P k. P', nomivas *punktlongo,* or *disto* de tin punkton.

La figuro formita da du edron, E k. E', nomivas *duedro,* or *edroparo*. La figuro formita da du edron E, E', kay da la faskopeco EE' nomivas *duedrangulo*. Fine la angulo EE', kushanta inter du edron E k. E', nomivas *edrangulo* (t. e. angulo formita da edron).

Pli jenerale, la figuro, formita da pluran edron, nomivas *pluredro;* exemple: *triedro, qaredro, qinedro,* &c.

* * *

La fundamenta geometrio de l'tridimensia spaco estas dusexa, kar ji estas fondita sur la reciprokrelato inter la du geandran spacelementon: punkto k. edro.

Punkto P k. edro E estas reciprokan, kiam lu plenumas la kondito:

$$d = 0,$$

en kiu d signas la interspaco, or disto, inter punkto P k. edro E.

Efekte, nu supozu, ke edro E estas fixa; tiam, por plenumi la ci-sura kondito, punkto P devas movivi en la plano de edro E; ji do naskas *lineara* punktaro (biserio de punkton). Reciproke, se punkto P estas fixa, edro E povas movivi nur cirker ti fixa punkto; ji do ulsor naskas *lineara* edraro (biserio de edron, nomita *garbo* de edron).

La punktedrara geometrio estas triparametra, kar la pozicio de un punkto, or de un edro, en la tridimensia spaco, dipendas de tri parametron *(koordinaton)*.

Kar du punkton sufitas por difini lineara monoserio de punkton (punktara *rekto*), kay tri punkton por difini lineara biserio (punktara *plano*), kay reciproke: kar du edron sufitas por difini lineara monoserio de edron (edrara *rekto*), kay tri edron por difini lineara biserio (edrara *punkto*), oni konstatas, ke la punktedrara geometrio estas *lineara* slokaraktere.

* * *

Ulter la punktedrara geometrio existas, en tridimensia spaco, alia fundamenta geometrio, nome: la *reglara geometrio*. Ti geometrio estas unsexa, kar la figuro geandra ye reglo ulsor estas reglo. La reglara geometrio estas fondita sur la reciprokrelato inter du reglon (geandran figuron):

Se oni elektas konstanta grando c, *nomita „indico", du reglon R, R', estas reciprokan pere de indico* c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \tan g\, \omega = c,$$

en kiu h signas la pley kurta disto, kay ω la angulo, inter la reglon R k. R'.

Efekte, se una el la du reglon, exemple reglo R, estas fixa, la alia reglo R' naskos, konforme al la ci supra kondito, lineara triserio de reglon *(lineara komplexo)*.

Kar tri reglon estas necesan por difini la lineara monoserio *(reglara hiperboloido)*, qar reglon por difini la lineara biserio *(lineara kongruenco)*, kay qin reglon por difini la lineara triserio *(lineara komplexo)*, oni konstatas, ke la reglara geometrio estas *qadratika* slokaraktere. Tio ulsor rezultas de la fakto, ke la reciprokrelato inter du reglon enhavas arbitera konstanto c.

Kiam indico c estas nula, la reglon R k. R' plenumas la kondito: $h \ tang \ \omega = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara komplexo farivas *speciala*. Oni tiam diras, ke la du reglon estas „reciprokan pere de indico nul“, or pli simple, ke lu estas „reciprokan“, sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la reglon R k. R' e su renkontas.

La reglara geometrio estas qarparametra, kar la pozicio de omni reglo, en tridimensia spaco, dipendas de qar parametron, or koordinaton.

* *
*

Omnin geometrion de la tridimensia spaco estas sinteziblan en un sola geometrio, kies spacelemento estas la *folyeto PRE;* la geometrio de folyeton, or *folyetara geometrio,* estas la pley jenerala el omtiun, kar folyeto estas la sintezo de la tri fundamentan elementon (punkto P, reglo R, k. edro E). Ti geometrio estas sisparametra, kar la pozicio de irg ni folyeto dipendas de sis parametron, or koordinaton; ji estas unsexa, kar la figuro geandra ye folyeto ulsor estas folyeto; fine, ji estas qadratika slokaraktere, kar:

lineara monoserio de folyeton estas difinata per *3 folyeton,*
„ *biserio* „ „ „ „ „ *4* „
„ *triserio* „ „ „ „ „ *5* „
„ *tetraserio* „ „ „ „ „ *6* „
„ *pentaserio* „ „ „ „ „ *7* „

kay reciproke:

2 *linearan pentaserion* e su sekcas slo *lineara tetraserio,*
3 „ „ „ „ „ „ *triserio,*
4 „ „ „ „ „ „ *biserio,*
5 „ „ „ „ „ „ *monoserio,*
6 „ „ „ „ *dufolyeto* (folyetparo).

Cetere la qadratika karaktero de l'folyetara geometrio estas qik rekonibla pro la fakto, ke la fundamenta reciprokrelato inter du folyeton (geandran figuron) entenas arbitera konstanto c. Efekte:

Du folyeton PRE k. P' R' E' estas reciprokan, pere de indico c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \ tang \ \frac{\omega}{2} = c,$$

en kiu h estas la glitlongo kay ω la angulo de la helicmovo, per kiu la folyeto povas migri de la pozicio PRE al la pozicio $P' R' E'$, or reciproke.[1]

[1] Ti remarkabla formo de la reciprokrelato inter du folyeton estis unmafoye sugestita al mi da nua bone konata samideano Prof. R. Bricard, el Parizo.

Se una el la du folyeton, exemple PRE, estas fixa, la alia folyeto $P'R'E'$, konforme al la ci-sura kondito, naskas lineara pentaserio, kiu ludas, en folyetara geometrio, la sama rolo, kie la lineara komplexo en reglara geometrio.

Kiam indico c estas nula, folyeton PRE k. $P'R'E'$ plenumas la kondito: $h \ tang \frac{\omega}{2} = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara pentaserio estas *speciala.* Oni tiam diras, ke folyeton PRE k. $P'R'E'$ estas „reciprokan pere de indico nul", or pli simple, ke lu estas „reciprokan", sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la folyeto povas migri de la pozicio PRE al la pozicio $P'R'E'$ per nura rotaco (sen glitmovo), or reciproke.

REMARKO. — La folyetara geometrio estas identa al la *korpara geometrio,* t. e. al la geometrio de rigidan korpon en spaco, kar nu yam konstatis, ke folyeto estas figuro eqalvalora al un *pozicio* de irg nia rigida korpo.[1]

IV. LA DUDIMENSIAN SPACON.

Existas du specon de spaco dudimensia: la *plana spaco,* or *plano,* kay la *cirkerpunkta spaco,* or *angula spaco.* Omdu tin spacon havas strukturo duala, or dusexa.

1. — LA PLANA SPACO or PLANO. — Existas en plano du fundamentan grandon: la *longo* k. la *angulo.* Al la longo korespondas la *punkto,* kar longo estas la grando kushanta inter du punkton *(punktlongo).* Al la angulo korespondas la *reglo,* or *latro,* kar angulo estas la grando kushanta inter du latron *(latrangulo).*

Kie en la tridimensia spaco, la figuro, formita da du punkton P k. P', nomivas *dupunkto* or *punktoparo;* la figuro formita da du punkton P, P', kay da la rektopeco PP', nomivas *dupunktlongo,* or *segmento;* kay la longo kushanta inter P k. P' nomivas *punktlongo,* or simple *longo* PP'.

La figuro formita da du reglon, or latron, R, R', nomivas *dulatro,* or *latroparo;* la figuro formita da du latron R, R', kay da la faskopeco RR' nomivas *dulatrangulo;* fine, la angulo kushanta inter la latron R k. R', nomivas *latrangulo,* or simple *angulo* RR'.

Pli jenerale, la figuro, formita da pluran latron, nomivas *plurlatro,* or *plurangulo;* exemple: *trilatro* or *triangulo, qarlatro* or *qarangulo, qinlatro* or *qinangulo,* &c.

La fundamenta geometrio de l' plana spaco estas dusexa, kar ji estas fondita sur la reciprokrelato, kiu existas en ti spaco inter punkto k. latro (geandran figuron):

Punkto P k. latro R estas reciprokan, kiam lu plenumas la kondito:

$$d = 0,$$

en kiu d signas la interspaco, or disto, inter punkto P k. latro R; alivorte, P k. R estas reciprokan, kiam P situas sur la rekto koincidanta kun latro R.

---

[1] Por pluan detalon koncerne la folyetara geometrio vidu diversan artiklon, publikigitan en la *Archives des sciences physiques et naturelles,* Genevo (1898 - 1919), kay en la 36ma tomo de la *Mémoires de la Société de Physique,* Genevo. Ulsor en la *Internacia Scienca Revuo,* 1909.

So, se latro R estas fixa, punkto P naskas lineara monoserio (punktara *rekto)*. Reciproke, se punkto P estas fixa, latro R ulsor naskas lineara monoserio (reglara *fasko)* cirker punkto P.

Kar du punkton sufitas por difini rekto, kay reciproke kar du reglon sufitas por difini fasko, oni konstatas, ke la punktoreglara geometrio (en plana spaco) estas lineara slokaraktere; ji estas duparametra, kar la pozicio de omni punkto, or reglo, dipendas de du parametron (koordinaton).

Ulter ti geometrio existas en la plana spaco la geometrio de sagon, or *sagara geometrio,* kiu estas la pley jenerala, kar jia spacelemento estas la *sago PR,* recevita per sintezo de la du fundamentan elementon (punkto P k. latro R) de ti spaco. La sagara geometrio estas triparametra, kar la pozicio de omni sago en la plano dipendas de tri parametron; ji estas unsexa, kar la geandra figuro de sago ulsor estas sago; fine, ji estas lineara slokaraktere, kar:

2 *sagon* difinas *sagkrono* (lineara monoserio de sagon) (fig. 2),
3 „ „ *sagkronoido* („ biserio „ „) (fig. 3);

kay reciproke:

2 *sagkronoidon* e su sekcas slo *sagkrono*
3 „ „ „ „ *un sago.*

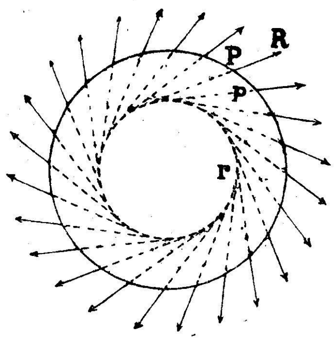

Fig. 2. — Sagkrono.

La fundamenta formo de la sagara geometrio en plano estas do la *kronoido*, or lineara biserio; ti biserio posesas un, kay nur un, sago *PR* che omni punkto P de la plana spaco, kie e ji montras figuro 3ma (Ti figuro prezentas la *flulinion* de la kronoido).

La sagkronoido estas difinata per la cia reciprokrelato, kiu existas inter du sagon (geandran figuron):

Du sagon PR *k.* P′R′ *estas reciprokan, kiam lu estas „kontran“,* t. e. simetrian una de la alia relate al ni reglo de la plana spaco (fig. 3). E ti kondito oni povas expresi per la relato:

$$\omega = \omega',$$

en kiu ω signas la angulo kushanta inter reglo R k. rekto PP', kay ω' la angulo kushanta inter reglo R' k. rekto $P'P$.

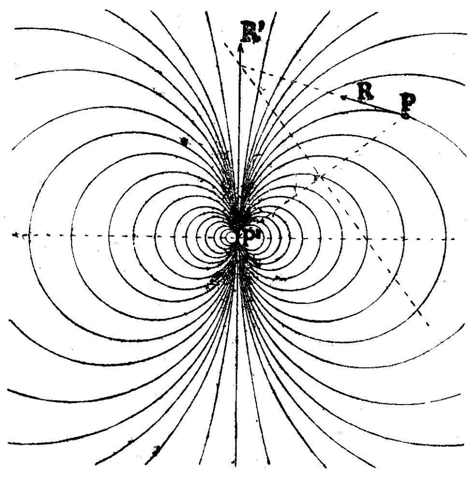

Fig. 3. — Sagkronoido difinita per sian flulinion.

REMARKO. — La sagara geometrio estas identa al la geometrio de rigidan korpon en la plana spaco (korpara plangeometrio), kar en ti spaco, sago *PR* estas figuro eqalvalora al un pozicio de irg nia rigida korpo.

2. — LA CIRKERPUNKTA SPACO or SPACO ANGULA. — Existas en la cirkerpunkta spaco du fundamentan grandon, kiun, spit ke omdu angulan, estas apartigendan: la *reglangulo* k. la *edrangulo.*

Al la reglangulo korespondas la reglo, kay al la edrangulo korespondas la edro.

La figuro formita da du reglon R, R', nomivas *dureglo* (regloparo), kie en la plana spaco. La figuro formita da du reglon R, R', kay da la faskopeco RR', nomivas *dureglangulo.* La angulo kushanta inter du reglon nomivas *reglangulo,* or simple *angulo,* kie en la plana spaco.

La figuro formita da du edron E, E', nomivas *duedro* (edroparo). La figuro formita da du edron E, E', kay da la faskopeco EE', nomivas *duedrangulo.* Fine, la angulo situanta inter du edron nomivas *edrangulo,* kie en tridimensia spaco.

Pli jenerale, la figuro formita da pluran edron (en la angula spaco) nomivas *pluredrangulo;* exemple: *triedrangulo, qaredrangulo, qinedrangulo,* &c.

Oni do vidas, ke:

en la *tridimensia spaco* la geometrian korpon nomivas *pluredron,*
„ „ *dudimensia spaco plana* „ „ „ „ *plurlatron* or *plurangulon,*
„ „ *dudimensia spaco angula* „ „ „ „ *pluredrangulon.*

La fundamenta geometrio de l' spaco angula estas la *regledrara geometrio;* ji estas dusexa, kar ji estas fondita sur la reciprokrelato, kiu existas, en ti spaco, inter reglo k. edro (geandran figuron):

Reglo R k. edro E estas reciprokan, kiam lu plenumas la kondito:

$$\delta = 0$$

en kiu δ signas la angula interspaco inter reglo R k. edro E; alivorte, reglo k. edro estas reciprokan, kiam la reglo kushas en la plano de la edro.

Efekte, se edro E estas fixa, reglo R naskos lineara monoserio de reglon (reglofasko). Reciproke, se reglo R estas fixa, edro E naskos lineara monoserio de edron (edrofasko) cirker ti reglo.

Kar du reglon sufitas por difini reglofasko, en la spaco angula, kay reciproke kar du edron sufitas por difini edrofasko, oni konstatas, ke la regledrara geometrio cirkerpunkta estas lineara slokaraktere; ji estas duparametra, kar la pozicio de irg ni reglo, or edro, dipendas de du parametron (koordinaton) en ti spaco.

Ulter ti geometrio existas en la angula spaco la geometrio de flagon, or *flagara geometrio,* kiu estas la pley jenerala, kar jia spacelemento estas la *flago RE,* recevita per sintezo de la du fundamentan elementon (reglo R k. edro E) de ti spaco. La flagara geometrio estas triparametra, kar la pozicio de irg ni flago en la angula spaco dipendas de tri parametron; ji estas unsexa, kar la geandra figuro de flago ulsor estas flago; fine, ji estas lineara slokaraktere, kar:

2 *flagon* difinas *flagkrono* (lineara monoserio de flagon),
3 „ „ *flagkronoido* („ biserio „ „);

kay reciproke:

2 *flagkronoidon* esu sekcas slo *flagkrono,*
3 „ „ „ „ *un flago.*

La fundamenta formo de la flagara geometrio en angula spaco, estas do la *kronoido*, or lineara biserio; ti biserio posesas un, kay nur un, flago RE sur omni reglo R de la angula spaco, kie e ji montras figuro 4 ma (Ti figuro prezentas la *flukonuson* de la kronoido). La intersekco de flagkronoido kun kuncentra sfero formas *sfera sagkronoido,* prezentita sur figuro 5 ma.

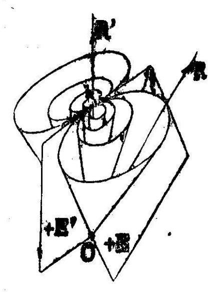

Fig. 4. — Flagkronoido difinita per sian flukonuson.

La flagkronoido estas difinita per la cia reciprokrelato, kiu existas inter du flagon (geandran figuron):

Du flagon RE k. $R'E'$ estas reciprokan, kiam lu estas „reflektan“, t. e. simetrian una de la alia relate al ni edro de la angula spaco (fig. 4). E ti kondito oni povas expresi per la relato:

$$\omega = \omega',$$

en kiu ω signas la edrangulo kushanta inter edro E k. plano RR', kay ω' la edrangulo kushanta inter edro E' k. plano $R'R$.

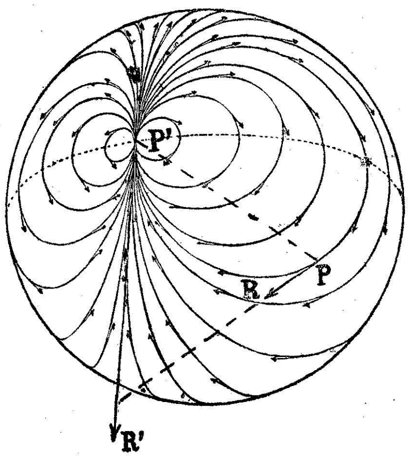

Fig. 5. — Sfera sagkronoido, or intersekco de flagkronoido kun kuncentra sfero.

REMARKO. — La flagara geometrio estas identa al la geometrio de rigidan korpon en la angula spaco, t. e. cirker fixa punkto (korpara geometrio cirkerpunkta), kar flago estas figuro eqalvalora al la pozicio de irg nia rigida korpo, kiu posesas un fixa punkto.

V. LA UNDIMENSIA SPACO.

La undimensia spaco konsistas: 1me el omnin punkton P lokantan sur fixa rektlinia axo S; 2me el omnin edron E strekiblan cirker ti axo. Existas do, en la undimensia spaco S, du fundamentan grandon: la *longo* (punktlongo), or interspaco inter du punkton P k. P', kay la *edrangulo,* or angula interspaco inter du edron E k. E'.

Kie en tridimensia spaco, la figuro formita da du punkton P, P', nomivas *dupunkto* (punktparo), kay la figuro formita da du edron E, E', nomivas *duedro* (edroparo).

Se ji existus, la fundamenta geometrio de la undimensia spaco S estus dusexa, kar, en ti spaco, punkto P k. edro E estas figuron geandran; sed ti geometrio fakte ne povas existi, kar jia fundamenta formo devus esti fondata sur la reciprokrelato $d = 0$, en kiu d signus la interspaco, or la disto, inter punkto P k. la reciproka edro E, kay oni facile konstatas, ke irg ni punkto P estas reciproka de irg ni edro E de la undimensia spaco, tial ke omni punkto P situas en omni edro E.

Sed existas en la undimensia spaco S, alia fundamenta geometrio, nome la geometrio de shildon, or *shildara geometrio;* ti geometrio estas la pley jenerala en la spaco S, kar jia elemento estas la *shildo PE,* formita per sintezo de la du fundamentan elementon: punkto P k. edro E. La shildo PE truvivas self en la undimensia spaco S, kar omdu jian elementon, P k. E, situas en ti spaco.

La shildara geometrio en spaco S estas duparametra, kar la pozicio de omni shildo, en ti spaco, dipendas de du parametron (kar, se PE estas ni fixa shildo kay $P'E'$ ni moviva shildo, la pozicio de PE relate al $P'E'$ estas difinata per la longo $h = PP'$ kay per la edrangulo $\omega = EE'$). La shildara geometrio estas unsexa, kar la geandra figuro de shildo ulsor estas shildo; fine, ti geometrio estas qadratika slokaraktere, kar jia fundamenta formo (shildara monoserio) estas difinata per la cia reciprokrelato inter du shildon (geandran figuron):

Du shildon PE k. $P'E'$ estas reciprokan pere de indico c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \; tang \frac{\omega}{2} = c,$$

en kiu h signas la longo PP', kay ω la edrangulo EE'. La cheesto de arbitera konstanto c en la fundamenta reciprokrelato montras, ke la shildara geometrio, en spaco S, estas qadratika; seqe, ke 3 shildon estas necesan por difini la lineara monoserio (lineara shildaro) reprezentata da la ci-sura relato; seqas anke, ke 2 linearan shildaron e su sekcas slo *dushildo* (shildoparo).

Kiam indico c estas nula, shildon PE k. $P'E'$ plenumas la kondito $h \; tang \frac{\omega}{2} = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara monoserio farivas *speciala*. Oni tiam diras, ke la du shildon estas „reciprokan pere de indico nul", or pli simple, ke lu estas „reciprokan", sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la shildo povas migri de la pozicio PE al la pozicio $P'E'$ per nura rotaco, sen glito, or per nura glito, sen rotaco; alivorte, tio signifas, ke la shildon PE k. $P'E'$ havas komuna origino P (kay malsaman folion E k. E'), or, ke lu havas komuna folio E (kay malsaman originon P k. P').

REMARKO. — La shildara geometrio en undimensia spaco S estas identa al la geometrio de rigidan korpon (korpara geometrio) cirker fixa axo S, kar, en ti spaco, shildo estas figuro eqalvalora al pozicio de irg nia rigida korpo, ligita al axo S.

Oni savas, ke, en la tridimensia spaco, al du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo korespondas un, kay nur un, axo S tia, ke la korpo povas migri de pozicio K al pozicio K' per nuran rotaco k. glito ye la axo S, seqe per movo tute entenata en la undimensia spaco S.

Oni povas do vortigi la cia teoremo: same ke, inter du irg nin punkton oni povas streki un, kay nur un, rekto, same: *inter du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo en tridimensia spaco oni povas streki un, kay nur un, undimensia spaco S.*

VI. LA SPACGRANDON.

1. — En la undimensia spaco S la fundamentan grandon estas: 1e la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de la rekto S; 2e la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron lokantan inter du edron E k. E' de la sama rekto S.

2a. — En la dudimensia spaco plana la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2me la *angulo* (reglangulo), or nombro de reglon kushantan inter du irg nin reglon R k. R'.

Ulter tin undimensian grandon existas, en plano, un dudimensia grando, nomita *areo*, kiu estas la nombro de punkton lokantan intre de klozita kurvo C, or la nombro de reglon sekcantan ti kurvo, kar irg ni plana kurvo estas konceptibla, cor kom punktaro, cor kom reglaro (aro de la ye kurvo C tanjantan reglon).

2b. — En la dudimensia spaco angula, or cirkerpunkta, la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *reglangulo*, or nombro de reglon kushantan inter du reglon R k. R' de irg ni reglofasko; 2me la *edrangulo*, or nombro de edron lokantan inter du irg nin edron E k. E'.

Ulter tin undimensian grandon existas un grando dudimensia, nome la *konusa solidangulo,* or simple *konusangulo,* kiu estas la limo, al kiu kuras la pluredrangulo, kiam la nombro de ties edron kreskas senfine. La konusangulo estas la nombro de reglon R kushantan intre de ni klozita konuso, or la nombro de edron E sekcantan ti konuso, kar konuso estas konceptibla, cor kom reglaro, cor kom edraro (formita da la tanjantan edron).

Konusangulon estas mezuratan per la areo, e kiu lu eltranchas el sfera surfaco kuncentre strekita per radiuslongo 1, kar la punkton lokantan sur ti areo estas evidente samnombran, ol la reglon kushantan intre de la konuso.

3. — En la tridimensia spaco la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2me la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron situantan inter du irg nin edron E k. E'; 3me la *tordiva angulo* (reglangulo), or nombro de reglon kushantan inter du irg nin reglon R k. R', or pli precize, inter du reglon R k. R' de irg ni orta konoido, kies axo estas la rekto I montrita sur figuro 6ma.

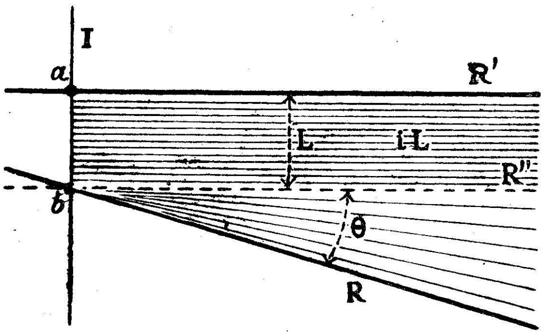

Fig. 6. — La tordiva reglangulo.

La tordiva angulo RR' estas *komplexa grando* (reglara), kar la dureglangulo RR' estas formata da la radiantan reglon kushantan en la planangulo RR'' $(=\vartheta)$ kay da la paralelan reglon kushantan inter la reglon R'' k. R'. Se nu nomas L la pley kurta distanco ab de la reglon R k. R', la valoro de la tordiva angulo RR' estos:

$$\lambda = \vartheta + i L,$$

en ki valoro la litero i signas la imaginara uno $(\sqrt{-1})$ uzata en algebro.

Kie en la kutima reprezento de komplexan qantiton, la pure komplexa parto $(i L)$ staras orte ye la reala parto ϑ, kar la plano $R''R'$ staras orte ye la plano RR''; kay la valoro de la komplexa qantito $(\vartheta + i L)$ estas sendipenda de la voyo seqita por migrigi la reglo de la pozicio R al la pozicio R', kar ti qantito restas la sama, irg nia estu la formo de la orta konoido kuniganta la reglon R k. R', kondite nur, ke la konoidaxo estu la komunortanto I.

Kar la du membron de la eqaluro $\lambda = \vartheta + i L$ devas esti *homogenan* (or samspecan), kay kar la grandon λ k. ϑ omdu estas grandon reglaran, la grando $i L$ ulsor devas esti reglara (efekte, ji konsistas el la paralelan reglon, kushantan inter R'' k. R'); alilatre la grando L estas punktara grando (pley kurta disto ab inter R k. R'); oni do konstatas, ke faktoro i transformas punktara grando en samvalora reglara grando, or, se oni preferas, faktoro i transformas punkto en reglo.[1]

La nombro $n = i L : \vartheta$ estos nomata *picho* de la tordiva angulo RR'.

[1] Por pluan detalon koncerne reglaran grandon en spaco vidu artiklo aperinta en „Revue Scientifique“ (23ma Septembra 1905), Parizo. — Ulsor, pri la korespondo inter reglara spaco k. punktara sfersurfaco imaginara, vidu artiklo titulita *Calcul géométrique réglé* en „The American Journal of Mathematics“ (1895), Baltimore, Md., U. S. A. En ti korespondo la imaginara uno i ne plu estas difinata per la eqaluro $i^2 = -1$, sed per la eqaluron $i \gtrless o$ kay $i^2 = o$, kie e tio montris Prof. C. Cailler, el la Geneva Universitato.

La dudimensian grandon en tridimensia spaco estas unme la *areo*, t. e. la nombro de punkton lokantan sur ni kurva surfaco intre de ni klozita kurvo *C*, strekita sur la surfaco, or la nombro de edron, kiun tuchas la surfaco en punkto intre de kurvo *C*. Areo estas do grando punktedrara.

La dua fundamenta grando dudimensia de la tridimensia spaco estas la *tordiva solidangulo* (reglara grando), or nombro de reglon entenatan en difinita parto de reglara biserio (kongruenco).

Nu konsideru, exemple, la kongruenco formata da omnin reglon, kiun e si apogas sur du irg nin kurvon, *C* k. *C'* (fig. 7). Oni savas, ke tin kurvon estas la *fokusan kurvon* de la kongruenco.[1] Por limigi difinita parto de la kongruenco, sufitas limigi difinita parto de la fokusan kurvon. Nu unme supozu, ke la fokusan kurvon estas du rekton *A* k. *A'* (fig. 8), kay nu marku sur tin rekton du segmenton *mn* $(= dL)$ kay *m'n'* $(= dL')$; la figuro *m n m' n'* estas qaredro tia, ke omnin reglon *R*, e si apogantan sur la segmenton *dL* k. *dL'*, kushas intre de la qaredro. La reglon *R* formas tordiva solidangulo, kies fokusan segmenton estas *mn* k. *m'n'*. La valoro de ti solidangulo estas:

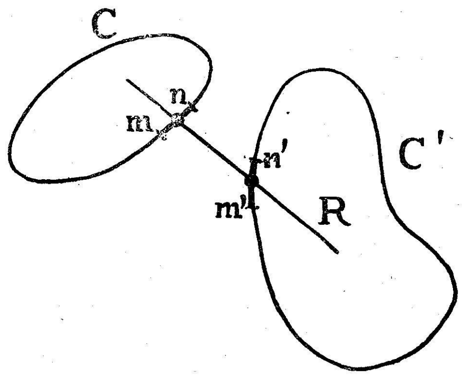

Fig. 7.

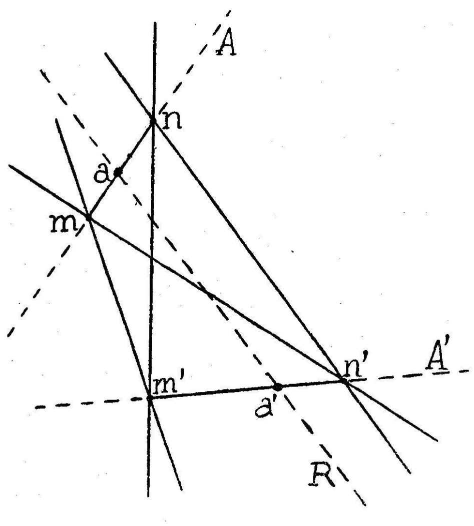

Fig. 8.

$$d\Sigma = \frac{dL\ dL'}{r^2} \sin\omega \sin\omega' \sin\varphi,$$

en ki formulo ω signas la angulo *AR*, ω' la angulo *A'R*, φ la edrangulo inter la planon *AR* k. *A'R*.

Ti formulo estas nenio alia, ol la Gauss'a formulo, kun la sola difero, ke Gauss ne parolas pri tordivan solidangulon, sed nur pri konusan solidangulon; efekte la tordiva angulo *(mn, m'n')* estas eqala ye la konusa angulo, naskita per un punkto *m*, kiu migras dey *m* til *n* kay regardas la segmento *m'n'*, or per fixa punkto *m*, kiu regardas segmento *m'n'*, migranta ye disto dL en direkto de *mn*.

Seqe, se *P, Q*, estas du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo *C*, kay *P', Q'*, du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo *C'*, la koresponda tordiva solidangulo de la kongruenco estos:

$$\Sigma = \int_P^Q \int_{P'}^{Q'} \frac{dL\ dL'}{r^2} \sin\omega \sin\omega' \sin\varphi,$$

[1] Mi elektis kongruenco posesanta fokusan kurvon, kar la kompreno estas pli facila en ti kazo, ol en la kazo de fokusan surfacon. Tamor, la aqerotan rezulton valoras ulsor por omnin kazon.

kay la sumita solidangulo de la kongruenco estos recevata per integralado cirker la klozan kurvon C k. C':

$$\Sigma = \int_C \int_{C'} \frac{dL\, dL'}{r^2} \sin \omega \sin \omega' \sin \varphi = 4\, k\pi,$$

en kiu k signas la nombro de foyon, ye kiu kurvon C k. C' e su krucas, kie chenunon de cheno.

Ti formulo estas aplikibla al la teorio de elektromagnetismo por kalkuli la interago inter du elektran fluon C k. C'.

Fine, la fundamenta tridimensia grando en tridimensia spaco estas la *volumo,* t. e. la nombro de punkton lokantan intre de klozita surfaco S, or la nombro de edron sekcantan ti surfaco. Volumo estas do punktedrara grando.

REMARKO PRI LA SIMBOLO i. — Nu diris ci-sure, ke faktoro i $(= \sqrt{-1})$ transformas punkto P en reglo R; alivorte la produto de i kay de irg ni punktlongo L estas homogena kun reglangulo ϑ, or λ. Simile, faktoro i transformas reglo R en edro E, alivorte la produto de i kay de irg ni reglangulo ϑ, or λ, estas homogena kun edrangulo l. Oni do havas:

$$(iL) = (\lambda) \quad \text{kay} \quad (i\lambda) = (l),$$

seqe:

$$(l) = (i\lambda) = (i^2 L) = (-L);$$

kay tio signifas, ke: *edrangulo* = *minus longo,*[1] or: *edro* = *minus punkto.* Exemple, se n estas la nombro, kiu mezuras la disto inter du punkton P k. P', kay se (L) estas la longuno, la longo PP' (nombro de punkton lokantan inter P k. P') estos: $n(L)$; se oni strekas du reglon R k. R', paralelan inter su ye disto PP', la nombro de paralelan reglon kushantan inter R k. R' estos n (kar ti nombro estas la sama, ol la nombro de punkton inter P k. P'), sed la reglara grando formata da tin paralelan reglon ne plu estos $n(L)$, sed $n(iL)$; fine, se oni strekas du edron E k. E', paralelan inter su ye sama disto PP', la nombro de paralelan edron lokantan inter E k. E' ulsor estos n, sed la edrara grando formata da tin paralelan edron ne plu estos $n(L)$, sed $n(i^2 L)$, t. e.: $n(-L)$, slo la homogena vidpunkto.

Oni do ritruvas ci tiey la dusexeco de spaco, kar punkto aperas naw, kom plusa $(+1)$, or vira, spacelemento, dur ke edro aperas, kom minusa (-1), or virina, spacelemento; fine, la reglo aperas kom hermafrodita elemento $(\pm i)$, kar irg ni reglo estas konceptibla, kom rekto, cor punktara cor edrara.

---

[1] Oni ne mixu *minus longo* kun *longo minusa.*