SUR LES TRAJECTOIRES D'UN MOBILE SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE ET A UNE RÉSISTANCE DE MILIEU

traèdre polaire à Φ, qui définit réellement la même congruence (T) que le premier.

Il existe une sextuple infinité de tétraèdres polaires à Φ; et par conséquent une sextuple infinité de groupes B_i peuvent être définis de la sorte.

Il n'y a donc aucune relation entre les points B_i.

SUR LES TRAJECTOIRES D'UN MOBILE SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE ET A UNE RÉSISTANCE DE MILIEU

PAR

C. CAILLER (Genève).

Je ne sais si une propriété mécanique, extrêmement simple, de la spirale logarithmique a été signalée jusqu'ici. La voici :

Une force attractive étant donnée, fonction quelconque de la distance au centre, il est toujours possible de lui adjoindre une résistance fonction de la vitesse, de telle manière que parmi les différentes trajectoires décrites par le mobile soumis aux deux forces figure une spirale logarithmique.

Soient m la masse du corps, $m\mathrm{R}(r)$ la force attractive, $mv\mathrm{G}(v)$ la résistance; R et G désignent ainsi deux fonctions des variables r et v respectivement, toutes deux positives.

Choisissons pour variables le rayon r et l'angle i que forme la vitesse v avec le rayon vecteur prolongé, de manière que $v \cos i = \frac{dr}{dt}$. Ecrivons les équations des aires et des forces vives.

Le moment[1], relatif au centre, des deux forces agissantes est égal à

$$- mv\mathrm{G}r \sin i \ ;$$

[1] Le moment est compté positif dans le sens où tourne le rayon vecteur.

on a donc d'abord

$$d(vr \sin i) = -vGr \sin i dt = -G \operatorname{tg} i dr ;$$

c'est l'équation des aires.

En second lieu, le travail des deux forces réunies est égal à

$$-mR dr - mv^2 G dt ,$$

ou encore

$$-m\left(R dr + vG\frac{dr}{\cos i}\right) ;$$

par suite, débarrassée du facteur m, l'équation des forces vives sera

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\left(R + \frac{vG}{\cos i}\right) dr .$$

En résumé, les équations cherchées sont

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dr}(vr \sin i) = -Gr \operatorname{tg} i , \\ &\frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{2}\right) + R = -\frac{vG}{\cos i} ; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

elles sont du premier ordre par rapport aux inconnues v et i, la variable indépendante étant r. Une fois intégré le système (1), le problème du mouvement peut être considéré comme résolu : en effet, θ étant l'angle polaire du rayon vecteur, nous aurons encore

$$d\theta = \operatorname{tg} i \frac{dr}{r} , \qquad dt = \frac{dr}{v \cos i} . \tag{2}$$

Ces formules déterminent la trajectoire, et le temps, en fonction de la variable r.

Récrivons le système (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &r\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + v\left(1 + r \cot i \frac{di}{dr}\right) = 0 , \\ &v\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + R = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

et supposons que la trajectoire soit une spirale logarithmique. Dans ce cas, i est constant, et (3) devient

$$r\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + v = 0 , \qquad v\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + R = 0 ,$$

ou bien

$$v^2 - rR = 0\ ,\qquad G = -\frac{\cos i}{r}\frac{d(vr)}{dr}\ . \tag{4}$$

Si l'attraction R est donnée en r, la première formule définit la vitesse le long de la trajectoire spirale, la seconde détermine en fonction de r, ou de v, la résistance G capable de produire le mouvement dont il s'agit. Enfin le temps sera donné par l'équation (2), qui est devenue

$$dt = \frac{dr}{\cos i\sqrt{rR}}\ . \tag{5}$$

Par exemple, dans le cas de l'attraction newtonienne, comment faut-il choisir la loi de résistance pour que la spirale logarithmique soit l'une des trajectoires possibles ?

Nous avons ici $R = \frac{k^2}{r^2}$, donc

$$v^2 = \frac{k^2}{r}\ ,\qquad r = \frac{k^2}{v^2}\ ,\qquad rv = \frac{k^2}{v}$$

et de là, d'après la seconde formule (4)

$$G = -\frac{\cos i}{2k^2}v^3\ .$$

Et comme, sauf le facteur m, la résistance est égale, à $vG(v)$, cette force est donc

$$F = -\frac{\cos i}{2k^2}v^4\ ,$$

elle varie comme la 4e puissance de la vitesse.

Nous devons avoir $F > 0$, ainsi le mouvement n'est possible que si $\cos i < 0$; autrement dit, le mobile décrit la spirale en s'approchant de son pôle. Le temps de chute est fini, car on a

$$dt = +\frac{1}{k\cos i}\sqrt{r}\,dr\ ,\qquad t = +\frac{1}{k\cos i}\int_r^0\sqrt{r}\,dr = -\frac{2r^{3/2}}{3k\cos i}\ .$$

Il importe de remarquer que dans le cas où la résistance $F = lv^4$ est donnée a priori, la spirale est complètement connue, à l'orientation près ; on doit avoir

$$\cos i = -2lk^2$$

et ainsi, pour la possibilité du mouvement en question, il faut que les coefficients des deux forces vérifient la condition

$$lk^2 < \frac{1}{2} .$$

Le calcul précédent se généralise à l'instant. Faisons

$$R = ar^p , \quad F = vG(v) = bv^q .$$

D'après la première équation (4), la force R ne saurait jamais être répulsive, il faut donc, pour la possibilité d'une solution, que a soit positif.

On trouve alors tout de suite qu'on doit avoir

$$q = \frac{2p}{p+1} , \quad b = -\frac{1}{2}(p+3)a^{\frac{1}{1+p}} \cos i , \quad v = \sqrt{a}\, r^{\frac{1+p}{2}} . \tag{6}$$

Mais q doit être positif pour que la force F croisse avec la vitesse, par conséquent p ne peut pas être compris entre 0 et -1. Alors, suivant que p est $\gtrless -3$, la quantité $\cos i$ est $\lesseqgtr 0$, et le mobile, quand il sera placé dans les conditions initiales voulues, s'approchera du centre attractif ou s'en écartera en suivant l'arc de spirale logarithmique. L'angle i que forme cette spirale avec ses rayons vecteurs est déterminé par la seconde formule (6); il faut donc, pour qu'il y ait une solution, que les paramètres a et b des forces R et F vérifient encore l'inégalité

$$\left| \frac{2b}{p+3} \right| a^{-\frac{1}{1+p}} < 1 \text{ [1]} .$$

Ces différentes conditions nécessaires pour la description de la spirale sont assez limitatives. Quand elles ne sont pas remplies, le problème exige l'intégration du système (3); il est facile de voir que dans le cas qui vient d'être examiné

$$R = ar^p , \quad F = bv^{\frac{2p}{p+1}} .$$

ce système peut être réduit à une seule équation du premier ordre.

[1] En tenant compte des *dimensions* des quantités a et b, on constate aisément l'homogénéité de cette condition.