I

est le produit vectoriel ou externe $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}$, vecteur dont la grandeur est $\sin a$, lorsque a est la distance sphérique minima des points en question.

d) que le vecteur du point d'intersection des droites $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}_1$ est de même $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$, la grandeur de ce vecteur étant $\sin \alpha$ lorsque α est l'angle des deux droites.

e) que le vecteur $\alpha\mathfrak{r} - \alpha_1\mathfrak{r}_1$ appartient à un point P situé sur la droite déterminée par $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}_1$ et tel que $\sin(\mathrm{PR}) : \sin(\mathrm{PR}_1) \equiv (\mathrm{RR}_1\mathrm{P}) = \alpha_1 : \alpha$.

f) que le vecteur $\beta\mathfrak{l} - \beta_1\mathfrak{l}_1$ appartient à une droite p passant par l'intersection des droites $l(\mathfrak{l})$ et $l_1(\mathfrak{l}_1)$ et telle que $\sin(pl) : \sin(pl_1) \equiv (ll_1p) = \beta_1 : \beta$.

g) que trois points sont collinéaires et que trois droites sont concourantes lorsque les trois vecteurs correspondants multipliés par certains facteurs donnent une somme nulle.

h) qu'une droite de vecteur $\mathfrak{l}$ ne passe par un point de vecteur $\mathfrak{r}$ que lorsque le produit scalaire ou interne de leurs vecteurs est nul.

i) que la droite dont le vecteur est $V\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ passe par le point $\mathfrak{r}$ tout en étant normale à la droite dont le vecteur est $\mathfrak{l}$.

I

2. — Considérons maintenant les identités vectorielles :

$$\begin{aligned}(\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3) + (\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) + (\beta_1\mathfrak{l}_1 - \beta_2\mathfrak{l}_2) &\equiv 0\ .\\ (\alpha_2\mathfrak{r}_2 - \alpha_3\mathfrak{r}_3) + (\alpha_3\mathfrak{r}_3 - \alpha_1\mathfrak{r}_1) + (\alpha_1\mathfrak{r}_1 - \alpha_2\mathfrak{r}_2) &\equiv 0\ .\end{aligned} \tag{I}$$

Si les vecteurs des côtés et ceux des sommets opposés d'un triangle sphérique sont $\mathfrak{l}_i$ et $\mathfrak{r}_i$, la première nous apprend que trois transversales angulaires, pour lesquelles le produit des rapports est *un* sont concourantes (1, *g*). Il ressort de la seconde que trois points appartenant aux trois côtés, pour lesquels le produit des rapports est *un,* sont collinéaires.

D'après (1, *d*) le point d'intersection dans le premier cas est déterminé par le produit vectoriel

$$V(\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3)(\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin \mathrm{A}_1}{\beta_1}\mathfrak{r}_1 + \frac{\sin \mathrm{A}_2}{\beta_2}\mathfrak{r}_2 + \frac{\sin \mathrm{A}_3}{\beta_3}\mathfrak{r}_3$$

lorsque les angles extérieurs du triangle sphérique sont A_i. Les coordonnées barycentriques du point d'intersection sont par conséquent $\sin A_i/\beta_i$.

De même on trouve dans le second cas pour la droite des trois points le vecteur

$$V(\alpha_2 \mathfrak{r}_2 - \alpha_3 \mathfrak{r}_3)(\alpha_3 \mathfrak{r}_3 - \alpha_1 \mathfrak{r}_1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin a_1}{\alpha_1}\mathfrak{l}_1 + \frac{\sin a_2}{\alpha_2}\mathfrak{l}_2 + \frac{\sin a_3}{\alpha_3}\mathfrak{l}_3$$

lorsque les a_i sont les côtés du triangle sphérique. Les coordonnées barycentriques de cette droite sont $1/\alpha_i$. Dans le cas-limite du triangle plan, les $\sin A_i$ et $\sin a_i$ peuvent être remplacés par les côtés a_i eux-mêmes.

3. — *a)* La première médiane, dont le vecteur a la forme $\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3$ passe par le milieu du côté opposé $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$. Le produit interne de ces deux vecteurs étant par conséquent (1, h) nul, il s'ensuit :

$$\beta_2 \sin h_2 - \beta_3 \sin h_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \beta_2 \sin A_3 - \beta_3 \sin A_2 = 0$$

lorsque les h_i sont les hauteurs du triangle sphérique. Les trois médianes

$$\sin A_2 \mathfrak{l}_2 - \sin A_3 \mathfrak{l}_3 , \qquad \sin A_3 \mathfrak{l}_3 - \sin A_1 \mathfrak{l}_1 , \qquad \sin A_1 \mathfrak{l}_1 - \sin A_2 \mathfrak{l}_2$$

sont donc concourantes; de même les trois symédianes

$$\frac{\mathfrak{l}_2}{\sin A_2} - \frac{\mathfrak{l}_3}{\sin A_3} , \qquad \frac{\mathfrak{l}_3}{\sin A_3} - \frac{\mathfrak{l}_1}{\sin A_1} , \qquad \frac{\mathfrak{l}_1}{\sin A_1} - \frac{\mathfrak{l}_2}{\sin A_2} .$$

Les premières passent d'après le paragraphe précédent par le point, dont les coordonnées barycentriques sont (1, 1, 1); les secondes passent par le point de Lemoine ou Græbe ($\sin^2 a_1$, $\sin^2 a_2$, $\sin^2 a_3$) qui, dans le cas-limite du triangle plan, devient (a_1^2, a_2^2, a_3^2).

b) La droite dont le vecteur $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3$ appartient au premier côté du triangle est par là même normale à ce côté; elle passe par le milieu de ce côté $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$, vu que le produit scalaire des deux vecteurs en question est nul (1, h). Le point d'intersection des normales concourantes

$$\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3 , \qquad \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1 , \qquad \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2$$

est déterminé (1, *d*) par le produit externe de deux de ces vecteurs

$$V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + V\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \cdot$$

C'est le centre du cercle circonscrit.

4. — Posons maintenant dans notre identité du paragraphe 2

$$\alpha_1 \equiv \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_3 = \cos a_1 \qquad \alpha_2 \equiv \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_1 = \cos a_2 \qquad \alpha_3 \equiv \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2 = \cos a_3 \ .$$

Elle prendra alors la forme[1]

$$V\mathfrak{x}_1 V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + V\mathfrak{x}_2 V\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + V\mathfrak{x}_3 V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \equiv 0 \qquad \text{(II)}$$

ou encore

$$V\mathfrak{x}_1 \,,\, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + V\mathfrak{x}_2 \,,\, \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + V\mathfrak{x}_3 \,,\, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \equiv 0$$

lorsque pour éviter une accumulation de V, on n'écrit que le dernier en remplaçant les autres par des virgules. Or, $V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ est le premier côté et $V\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ d'après (1, *i*) la normale abaissée sur cette droite du sommet opposé $\mathfrak{x}_1$; l'identité nous apprend donc que dans un triangle sphérique les trois hauteurs sont concourantes. L'orthocentre x_i étant sur la première hauteur, nous avons, en écrivant par abréviation s_i et S_i, c_i et C_i pour $\sin a_i$, $\sin A_i$, $\cos a_i$ et $\cos A_i$ d'après (1, *h*)

$$\begin{aligned}(x_1\mathfrak{x}_1 + x_2\mathfrak{x}_2 + x_3\mathfrak{x}_3) \,.\, V\mathfrak{x}_1 \,,\, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 &\equiv x_3 V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 \,.\, V\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 - x_2 V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 \,.\, V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \\ &= x_3 s_1 s_2 C_3 - x_2 s_1 s_3 C_2 = 0\end{aligned}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \operatorname{tang} A_1 : \operatorname{tang} A_2 : \operatorname{tang} A_3 \ .$$

5. — En multipliant l'identité du paragraphe précédent scalairement par le vecteur $\mathfrak{x}_4$, nous obtenons la nouvelle identité :

$$V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4 \,.\, V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4 \,.\, V\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + V\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4 \,.\, V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \equiv 0 \ . \qquad \text{(III)}$$

Elle nous apprend d'abord : si dans un quadrangle complet $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4)$ sphérique ou plan non seulement les côtés $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2)$ et $(\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4)$ sont *perpendiculaires ou conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane,* mais encore les côtés $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4)$

---

[1] On a en effet $\mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_1 \, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{x}_2 \, \mathfrak{x}_3 \equiv V\mathfrak{x}_1 V \, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 \cdot$

et $(\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1)$, il en sera de même des côtés $(\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4)$ et $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)$, vu que la disparition des deux premiers produits scalaires entraîne celle du dernier.

On peut évidemment écrire notre identité :

$$V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0$$

et considérer les vecteurs comme appartenant aux quatre côtés d'un quadrilatère sphérique complet. Dans ce cas les six produits vectoriels déterminent les sommets (1, *d*), et l'identité nous apprend : si les distances des sommets $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$ et $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et des sommets $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4$ et $V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1$ sont des quadrants, ou bien si ces sommets sont conjugués deux à deux par rapport à une conique il en est de même pour les sommets $V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4$ et $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$.

6. — Reprenons encore l'identité I et posons-y :

$$\alpha_1 = V\mathfrak{r}_2\mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{r}_2 . V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2$$
$$\alpha_2 = V\mathfrak{r}_3\mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 \equiv \mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 \equiv \mathfrak{r}_1 . V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3$$
$$\alpha_3 = V\mathfrak{r}_1\mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 \equiv \mathfrak{r}_1 . V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 \equiv \mathfrak{r}_2 . V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 .$$

Nous rappelant que

$$\mathfrak{r}_3 . \mathfrak{x}\, \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2 . \mathfrak{x}\, \mathfrak{r}_3$$

est le produit externe des vecteurs

$$\mathfrak{x} \quad \text{et} \quad V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$$

nous voyons sans peine qu'un des trois termes de notre identité avec un changement de signe devient le produit externe des vecteurs :

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1$$

ou encore[1] de

$$\mathfrak{l}_1 \quad \text{et} \quad V\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 .$$

L'identité toute entière prend par conséquent la forme :

$$V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0 . \qquad \text{(IV)}$$

[1] Se rappeler que $V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1 \mathfrak{l}_1$ et $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1 \mathfrak{r}_1$. On multiplie donc en réalité par le module du triangle sphérique des $\mathfrak{r}_i$, c'est-à-dire par $\sin A_i : \sin a_i$.

L'interprétation géométrique de cette identité est bien simple. En effet, si les $\mathfrak{l}_i$ sont les côtés d'un trilatère sphérique et si $\mathfrak{l}$ est le vecteur d'une droite quelconque l, on a successivement pour le premier sommet A_1, pour la normale p_1 abaissée sur la droite l, pour son intersection P_1 avec l, et pour la normale q_1 du point P_1 sur le premier côté du triangle, en appliquant alternativement (1, *d*) et (1, *i*)

$$A_1 \equiv V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3\ , \quad p_1 \equiv V\mathfrak{l}\ ,\ \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3\ , \quad P_1 \equiv V\mathfrak{l}\ ,\ \mathfrak{l}\ ,\ \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3\ , \quad q_1 \equiv V\mathfrak{l}_1\ ,\ \mathfrak{l}\ .\ \mathfrak{l}\ ,\ \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3\ .$$

Nous obtenons deux droites analogues $q_2 q_3$ en partant des deux autres sommets du trilatère. L'identité nous apprend que les trois droites sphériques q_i sont concourantes. Leur point commun est *l'orthopôle de la droite sphérique*[1]. D'après l'extension connue donnée au produit externe de deux vecteurs, l'identité IV peut encore s'interpréter de la manière suivante :

Si l'on mène par les sommets A_i des droites p_i, conjuguées à une droite quelconque l par rapport à une conique donnée, les points d'intersection étant P_i, les droites q_i, qui passant par les P_i sont conjuguées aux côtés a_i du triangle sphérique passent par un point.

7. — On trouve les coordonnées barycentriques x_i de l'orthopôle correspondant à la droite sphérique u_i en formant (1, *d*) le produit externe de

$$q_1 \equiv \alpha_2\mathfrak{t}_2 - \alpha_3\mathfrak{t}_3 \qquad \text{et} \qquad q_2 \equiv \alpha_3\mathfrak{t}_3 - \alpha_1\mathfrak{t}_1$$

c'est-à-dire qu'on a d'une manière générale

$$x_1\mathfrak{t}_1 + x_2\mathfrak{t}_2 + x_3\mathfrak{t}_3 = \alpha_2\alpha_3 V\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3 + \alpha_3\alpha_1 V\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1 + \alpha_1\alpha_2 V\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$$

ce qui, multiplié successivement par

$$V\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\ , \qquad V\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1\ , \qquad V\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$$

[1] M. J. Neuberg a énoncé ce théorème en 1875 dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (démonstration par H. van Aubel, *N. C. M.*, t. II, p. 316, et par E. Lemoine, *J. M. E.*, 1884, p. 50). Il a étudié la correspondance entre l'orthopolaire et l'orthopôle dans la *N. C. M.*, 1878, p. 379. (Voir *Mathesis*, t. IV, avril 1914, p. 92.)

donne pour les coordonnées de l'orthopôle

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 & \\ = \alpha_2\alpha_3\Omega_{11} + \alpha_3\alpha_1\Omega_{12} + \alpha_1\alpha_2\Omega_{13} & \\ : \alpha_2\alpha_3\Omega_{12} + \alpha_3\alpha_1\Omega_{22} + \alpha_1\alpha_2\Omega_{23} & \\ : \alpha_2\alpha_3\Omega_{13} + \alpha_3\alpha_1\Omega_{23} + \alpha_1\alpha_2\Omega_{33} & \end{aligned}$$

si l'on pose par abréviation pour les coefficients des produits $\alpha_r\alpha_s$

$$\Omega_{ik} \equiv \sin a_i \sin a_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ki} .$$

Il suffira maintenant de se rappeler que Δ étant $[\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3]$, nous avons :

$$\alpha_1 \equiv V\mathfrak{r}_2\mathfrak{l}.V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{l}.\mathfrak{r}_2 \ \ \mathfrak{l}.\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2.\mathfrak{r}_3 \ \ \mathfrak{l}.\mathfrak{l} = \Delta^2 u_2 u_3 - \cos a_1 \Omega(uu) .$$

La première coordonnée x_1 de l'orthopôle devient alors la somme de

$$\begin{aligned} \alpha_2\alpha_3\Omega_{11} &= [\Delta^4 u_1^2 u_2 u_3 - \Delta^2(c_2 u_1 u_2 + c_3 u_1 u_3)\Omega(uu) + c_2 c_3 \Omega^2(uu)] s_1 s_1 \\ \alpha_3\alpha_1\Omega_{12} &= [\Delta^4 u_2^2 u_3 u_1 - \Delta^2(c_3 u_2 u_3 + c_1 u_2 u_1)\Omega(uu) + c_3 c_1 \Omega^2(uu)] s_1 s_2 C_3 \\ \alpha_1\alpha_2\Omega_{13} &= [\Delta^4 u_3^2 u_1 u_2 - \Delta^2(c_1 u_3 u_1 + c_2 u_3 u_2)\Omega(uu) + c_1 c_2 \Omega^2(uu)] s_1 s_3 C_2 \end{aligned}$$

8. — Lorsqu'on passe au cas-limite du plan, les termes qui contiennent la quatrième puissance de

$$\Delta \equiv \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik}$$

deviennent infiniment petits par rapport aux autres. Il ne reste, lorsqu'on pose

$$\lim \Delta \equiv \lim \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik} = \sin A_i \sin A_k \,.\, a_{ik} \equiv \bar{\Delta} \quad \text{et} \quad \lim \cos a_i = 1$$

qu'une première partie qui devient à la limite

$$- \bar{\Delta}^2. a_1 [(a_2 C_3 + a_3 C_2) u_2 u_3 + (a_1 + a_3 C_2) u_3 u_1 + (a_1 + a_2 C_3) u_1 u_2]$$

ou

$$\bar{\Delta}^2. a_1 [a_1 u_2 u_3 + a_2 \cos A_3 . u_3 u_1 + a_3 \cos A_2 . u_1 u_2]$$

et d'une seconde partie du même ordre

$$\begin{aligned} \Omega(uu)[c_2 c_3 (1 - c_1^2) + c_1 c_2 (c_1 c_3 - c_2) + c_1 c_3 (c_1 c_2 - c_3)] \equiv \\ \Omega(uu)(c_1 c_2 - c_3)(c_1 c_3 - c_2) \equiv \Omega(uu) \sin^2 a_1 \sin a_2 \sin a_3 \cos A_2 \cos A_3 \end{aligned}$$

qui devient à la limite $a_1^2 a_2 a_3 \cos A_2 \cos A_3 . \Omega(uu)$. Si enfin nous introduisons au lieu des coordonnées u_i de la droite ses distances p_i aux sommets du triangle en posant[1] $\bar{\Delta} u_i = \sqrt{\Omega(uu)} . p_i$ nous obtenons comme première coordonnée barycentrique de l'orthopôle

$$a_1 [a_1 a_2 a_3 C_2 C_3 + a_1 p_2 p_3 + a_3 C_2 p_1 p_2 + a_2 C_3 p_1 p_3] .$$

Les deux autres s'en déduisent par permutation cyclique des indices.

9. — Lorsqu'il s'agit inversement de trouver la droite sphérique $\mathfrak{l}(u_i)$, son orthopôle $\mathfrak{x}_0$ étant donné, il suffira d'exprimer que $\mathfrak{x}_0$ est situé sur les droites q_i, ce qui fournit les équations

$$\mathfrak{x}_0 V \mathfrak{l}_1 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{x}_1 \equiv [\mathfrak{l}\mathfrak{x}_0 \mathfrak{l}_1] \mathfrak{l} . \mathfrak{x}_1 + [\mathfrak{l}_1 \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_1] \mathfrak{l} . \mathfrak{l} = 0$$
$$\mathfrak{x}_0 V \mathfrak{l}_2 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{x}_2 \equiv [\mathfrak{l}\mathfrak{x}_0 \mathfrak{l}_2] \mathfrak{l} . \mathfrak{x}_2 + [\mathfrak{l}_2 \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_2] \mathfrak{l} . \mathfrak{l} = 0$$
$$\mathfrak{x}_0 V \mathfrak{l}_3 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{x}_3 \equiv [\mathfrak{l}\mathfrak{x}_0 \mathfrak{l}_3] \mathfrak{l} . \mathfrak{x}_3 + [\mathfrak{l}_3 \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_3] \mathfrak{l} . \mathfrak{l} = 0$$

du second degré par rapport aux u_i. Lorsqu'une droite u_i satisfait à deux de ces équations, elle suffira à cause de l'identité (IV) également à la troisième. Il y a donc sur la sphère quatre *orthopolaires* correspondant au point $\mathfrak{x}_0$ comme orthopôle ; ce sont les tangentes communes aux courbes de seconde classe.

Il est facile de trouver les six foyers des trois coniques sphériques[2]. En effet, $\mathfrak{l} . \mathfrak{l} \equiv \Omega(uu) = 0$ étant l'équation de la courbe absolue, le premier terme dans chacune de ces équations égalé à zéro, donne l'équation de deux foyers, de sorte que les six foyers en question sont :

$$\mathfrak{x}_1 , \; V \mathfrak{x}_0 \mathfrak{l}_1 \; ; \qquad \mathfrak{x}_2 , \; V \mathfrak{x}_0 \mathfrak{l}_2 \; ; \qquad \mathfrak{x}_3 , \; V \mathfrak{x}_0 \mathfrak{l}_3 \; .$$

Trois de ces foyers coïncident avec les sommets ; les trois autres sont situés sur les côtés du triangle à des distances $\pi/_2$ du point $\mathfrak{x}_0$. Lorsqu'on passe au plan, les trois derniers

---

[1] Soit : $\sin A_1 . u_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 . u_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 . u_3 \mathfrak{l}_3 = u_4 \mathfrak{l} = \sqrt{\Omega(uu)} . \mathfrak{l}$. En multipliant par $\mathfrak{x}_1$ nous aurons $\sin A_1 \sin h_1 u_1 = u_4 \sin p_1$ ou $\Delta . u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \sin p_1$ et $\bar{\Delta} . u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} . p_1$.

[2] « Essai de géométrie sphérique », p. 250-251.

foyers s'éloignent à l'infini; dans le plan les coniques sont par conséquent des paraboles ayant leurs foyers aux sommets du triangle et leurs axes parallèles aux côtés opposés.

10. — Si dans l'identité IV on prend, au lieu des quatre droites, quatre points, c'est-à-dire au lieu du trilatère $\mathfrak{l}_i$ et de la droite $\mathfrak{l}$, le triangle $\mathfrak{r}_i$ et le point $\mathfrak{r}$, on obtient

$$V\mathfrak{r}_1 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_2 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_3 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \equiv 0 ,$$

identité qui exprime simplement le théorème réciproque; nous n'en parlons pas.

11. — Nous arrivons à un autre théorème qu'on pourrait appeler le théorème *semi-réciproque,* en gardant dans notre identité les côtés du trilatère $\mathfrak{l}_i$, mais en remplaçant la droite quelconque $\mathfrak{l}$ par un point quelconque $\mathfrak{r}$. Dans sa nouvelle forme :

$$V\mathfrak{l}_1 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0 , \qquad \text{(V)}$$

l'identité nous apprend: *Lorsque par un point quelconque* P($\mathfrak{r}$) *d'un triangle sphérique ou plan* A_i *on fait passer des droites* q_i *normales ou conjuguées aux droites* $p_i \equiv A_iP$, *leurs points d'intersection* Q_i *avec les côtés correspondants sont collinéaires* [1].

En effet, on a successivement pour le sommet A_1, pour la droite p_1, pour la normale q_1 et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté du triangle

$$A_1 \equiv V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \qquad p_1 \equiv V\mathfrak{r} , \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$$
$$q_1 \equiv V\mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \qquad Q_1 \equiv V\mathfrak{l}_1 , \mathfrak{r} , \mathfrak{r} , \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 ,$$

L'identité V nous montre que le point Q_1 et les deux autres Q_2 et Q_3 qu'on obtient en partant des sommets A_2 et A_3 sont bien collinéaires. q. e. d.

---

[1] Voir encore ma « Note sur la géométrie du triangle et du tétraèdre » dans l'*Ens. Math.*, 1917, pp. 273-275, à propos de laquelle M. A. Kiefer m'a fait remarquer que pour le cas spécial où P est le centre du cercle inscrit, le théorème se trouve chez Steiner parmi les « Vermischte Sätze und Aufgaben » (*Ges. Werke,* Bd. 2, S. 673) et chez A. Kiefer, « Ueber eine Dreiecksaufgabe und bezügliche Sätze » (*Archiv der Mathematik und Physik,* III, Reihe XII, Heft 1, S. 30).

12. — Si les coordonnées x_i du point $\mathfrak{x}$ sont données, il est facile d'exprimer les coordonnées u_i de la droite correspondante en fonction des x_i. Nous devons en effet chercher la droite sphérique qui relie les points

$$Q_1 \equiv \alpha_2 \mathfrak{x}_2 - \alpha_3 \mathfrak{x}_3 \ ; \qquad Q_2 \equiv \alpha_3 \mathfrak{x}_3 - \alpha_1 \mathfrak{x}_1$$

lorsque les coefficients α_i sont déterminés par les équations :

$$\alpha_1 = V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x} . V\mathfrak{x}\ \mathfrak{x}_3 \ ; \qquad \alpha_2 = V\mathfrak{x}_3\mathfrak{x} . V\mathfrak{x}\ \mathfrak{x}_1 \ ; \qquad \alpha_3 = V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x} . V\mathfrak{x}\ \mathfrak{x}_2 \ .$$

Nous trouvons son vecteur en formant le produit vectoriel ou externe. Ceci nous permet de conclure (2), que les coordonnées u_i de la droite cherchée satisfont à

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_2 \alpha_3 : \alpha_3 \alpha_1 : \alpha_1 \alpha_2 \ .$$

Quant aux coefficients α_i, on voit donc sans peine que

$$\alpha_1 \equiv V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x} . V\mathfrak{x}\ \mathfrak{x}_3 \equiv \mathfrak{x} . \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x} . \mathfrak{x}_3 - \cos a_1\, \mathfrak{x} . \mathfrak{x} = \omega(x_2)\,\omega(x_3) - \cos a_1\, \omega(xx)$$

pourvu que $\omega(x_2)$ et $\omega(x_3)$ soient les demi-dérivées partielles par rapport à x_2 et x_3 de la forme quadratique

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} . \mathfrak{x} \equiv \omega(xx) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cos a_1 x_2 x_3 + 2\cos a_2 x_3 x_1 + 2\cos a_3 x_1 x_2 \\ &\equiv (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \ldots = l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \ldots \end{aligned}$$

13. — Dans le cas-limite du plan la valeur trouvée pour α_1

$$\left(l_\infty - 2x_1 \sin^2 \frac{a_3}{2} - 2x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2}\right)\left(l_\infty - 2x_2 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 2x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2}\right)$$
$$- \left(1 - 2\sin^2 \frac{a_1}{2}\right)\left(l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 4x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} - \ldots\right)$$

devient

$$x_1^2(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + x_1 x_2 (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + x_1 x_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + 2x_2 x_3 a_1^2$$

etc. Nous pouvons cependant donner aux α_i, donc aux u_i de la droite, une forme plus simple. Nous avons en effet :

$$\alpha_1 \equiv V\mathfrak{x}_2\mathfrak{x} . V\mathfrak{x}\ \mathfrak{x}_3 = - \sin PA_2 \ \sin PA_3 . \cos \Phi_1$$

si nous appelons Φ_1 l'angle formé par les droites PA_2 et PA_3.

De cette manière nous trouvons pour le cas de la sphère

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin \mathrm{PA}_1}{\cos \Phi_1} : \frac{\sin \mathrm{PA}_2}{\cos \Phi_2} : \frac{\sin \mathrm{PA}_3}{\cos \Phi_3}$$

et dans le cas d'un triangle plan

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\mathrm{PA}_1}{\cos \Phi_1} : \frac{\mathrm{PA}_2}{\cos \Phi_2} : \frac{\mathrm{PA}_3}{\cos \Phi_3} .$$

14. — Reprenons l'identité (V) et multiplions-la scalairement par le vecteur quelconque $\mathfrak{l}_4$. Dans sa nouvelle forme[1]

$$\mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4 + \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4 + \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4 \equiv 0 \qquad \text{(VI)}$$

l'identité nous fournit une démonstration très simple du *théorème*, généralisé pour la sphère, de *Bodenmiller*[2]:

Le lieu géométrique du point P *tel que les droites sphériques qui le relient à deux points donnés de la surface sphérique sont normales ou conjuguées est une conique; les trois coniques qui correspondent aux trois couples de sommets d'un quadrilatère appartiennent à un même faisceau.*

En effet, lorsque les côtés du quadrilatère sont $\mathfrak{l}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), nous aurons en $\mathrm{V}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et $\mathrm{V}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$ deux sommets opposés. Les droites qui le relient au point $\mathfrak{r}$ sont $\mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et $\mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$, et ces droites sont normales (ou conjuguées) lorsque $\mathfrak{r}$ satisfait à l'équation de la conique

$$\mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4 = 0 .$$

Nous obtenons d'autres coniques en partant des deux autres couples de sommets opposés; l'identité nous montre que les points communs aux deux premières satisfont également à la troisième, ou bien que les trois coniques appartiennent à un même faisceau.

---

[1] Il est en effet

$$\mathfrak{l}_4 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{l}_1 \,.\, \mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{l}_4\mathfrak{l}_1 \equiv - \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \,.\, \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{l}_4\mathfrak{l}_1 .$$

[2] C. Gudermann. *Grundriss der analytischen Sphärik*, 1830, S. 138.