cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont collinéaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\lambda_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{x}] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{x}] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{x}]$$
$$\mu_1 = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{x}] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{x}] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{x}]$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathfrak{b} + \mu_1 \mathfrak{c} = \mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathrm{V}\mathfrak{x}\mathfrak{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \dots$ par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', \dots$, cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \\ &-[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius*[1] *:*

Soient $\mathrm{A_i}$ *et* $\mathrm{A'_i}$ *deux triangles sphériques et* l *une droite sphérique quelconque.*

Lorsque les droites $\mathrm{p_i}$ *qui relient les points* $\mathrm{P_i} \equiv (\mathrm{l}, \mathrm{a_i})$ *aux sommets* $\mathrm{A'_i}$ *du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites* $\mathrm{p'_i}$ *qui relient les points* $\mathrm{P'_i} \equiv (\mathrm{l}, \mathrm{a'_i})$ *aux sommets* $\mathrm{A_i}$ *du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la *droite* sphérique l est $\mathfrak{x}$ et si les vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nous aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites p_i, p'_i :

$$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad \mathrm{P}'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,.$$

[1] *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.

L'identité nous montre que les p_i sont concourantes lorsque les p'_i le sont. q. e. d.

2. Nous pouvons cependant tirer de notre identité un théorème tout différent en interprétant le vecteur $\mathfrak{r}$ non pas comme correspondant à une *droite* sphérique, mais comme appartenant à un *point* P. Le théorème en question est le suivant :

Par un point quelconque de la surface sphérique P($\mathfrak{r}$) *on mène des normales* $\mathrm{p_i}$ *et* $\mathrm{p'_i}$ *aux côtés* $\mathrm{a_i}$ *et* $\mathrm{a'_i}$ *de deux triangles sphériques et ensuite par les sommets* $\mathrm{A'_i}$ *et* $\mathrm{A_i}$ *des droites sphériques* $\mathrm{q_i}$ *et* $\mathrm{q'_i}$ *normales aux* $\mathrm{p_i}$ *et* $\mathrm{p'_i}$. *Lorsque les* $\mathrm{q_i}$ *sont concourantes, il en est de même des* $\mathrm{q'_i}$.

En effet on trouve dans ce cas pour les vecteurs des droites p_1, p'_1 et q_1, q'_1 immédiatement

$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$q_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad q'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,.$$

Lorsque les q_i sont concourantes, le produit pseudo-scalaire du premier terme de notre identité s'annule ; la disparition du second terme qui en est la conséquence montre que dans ce cas les q'_i aussi sont concourantes et inversement. q. e. d.

3. Dans le cas-limite du *plan* nous aurons, quel que soit le point P, la droite p_1 normale à a_1 et q_1 de nouveau normale à p_1, c'est-à-dire q_1 *parallèle* au côté a_1 du premier triangle. Le théorème qui, pour le plan, est dû à M. *J. Neuberg*[1], peut être formulé :

Etant donnés deux triangles plans $\mathrm{A_i}$ *et* $\mathrm{A'_i}$ *et les droites* $\mathrm{q_i}$ *et* $\mathrm{q'_i}$ *menées par les sommets* $\mathrm{A'_i}$ *et* $\mathrm{A_i}$ *parallèles aux côtés* $\mathrm{a_i}$ *et* $\mathrm{a'_i}$; *lorsque les droites* $\mathrm{q_i}$ *sont concourantes, il en est de même des droites* $\mathrm{q'_i}$ [2].

29. — Nous arrivons à une autre identité entre *sept* vecteurs en remplaçant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , en posant ensuite

$$\lambda_1 = [\mathfrak{b}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{c}']$$

$$\mu_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{r}\mathfrak{c}']\,.$$

[1] *Mathesis*, 1882, p. 144, 1883, p. 86, 1914, p. 91.

[2] Voir par 23, 3.

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 V\mathfrak{ca} + \mu_1 V\mathfrak{ab} = V\mathfrak{a},\ V\mathfrak{xa}'V\mathfrak{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a},\ V\mathfrak{xa}'V\mathfrak{bc} \quad V\mathfrak{b},\ V\mathfrak{xb}'V\mathfrak{ca} \quad V\mathfrak{c},\ V\mathfrak{xc}'V\mathfrak{ab}]\\ &+ [\mathfrak{abc}]^2[V\mathfrak{a}',\ V\mathfrak{xa}V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}',\ V\mathfrak{xb}V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}',\ V\mathfrak{xc}V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0\,.\end{aligned}$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit $P(\mathfrak{x})$ un *point* quelconque de la surface sphérique ; soient

$$A_i \equiv \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c} \qquad A_i' \equiv \mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv V\mathfrak{bc},\ V\mathfrak{ca},\ V\mathfrak{ab} \qquad a_i' \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}',\ V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}',\ V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point P aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_1 \equiv VV\mathfrak{xa}'V\mathfrak{bc} \qquad Q_1' \equiv VV\mathfrak{xa}V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

etc., et l'identité nous apprend : lorsque les droites $(A_i,\ Q_i)$ sont concourantes, les droites $(A_i',\ Q_i')$ le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant $\mathfrak{x}$ comme le vecteur d'une *droite*.

VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[V\mathfrak{aa}'\ V\mathfrak{bb}'\ V\mathfrak{cc}'] + [V\mathfrak{bc}'\ V\mathfrak{ca}'\ V\mathfrak{ab}'] + [V\mathfrak{cb}'\ V\mathfrak{ac}'\ V\mathfrak{ba}'] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 *les sommets d'un triangle sphérique,* P *un point quelconque de la surface sphérique,* p_1, p_2, p_3 *les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points*

$$P_{11}\ ,\ P_{12}\ ,\ P_{13}\ ; \quad P_{21}\ ,\ P_{22}\ ,\ P_{23}\ ; \quad P_{31}\ ,\ P_{32}\ ,\ P_{33}\ ;$$