

# VI

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les  $Q'_i$  aussi sont colli-  
néaires. q. e. d.

## VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par.  
24 pour satisfaire à la condition imposée aux  $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathbf{ca}'\mathbf{r}] & \lambda_2 &= [\mathbf{ab}'\mathbf{r}] & \lambda_3 &= [\mathbf{bc}'\mathbf{r}] \\ \mu_1 &= [\mathbf{a}'\mathbf{br}] & \mu_2 &= [\mathbf{b}'\mathbf{cr}] & \mu_3 &= [\mathbf{c}'\mathbf{ar}] \end{aligned}$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{bc} \mathbf{V}\mathbf{ra}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs  
arbitraires  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \dots$  par  $\mathbf{V}\mathbf{bc}, \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}', \dots$ , cette dernière expres-  
sion devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à  
déterminer

$$\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quel-  
conques :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{abc}][\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{r}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \\ & - [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{r}, \mathbf{ca} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{r}, \mathbf{ab}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la  
sphère *un théorème de Möbius*<sup>1</sup> :

*Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques et  $l$  une droite  
sphérique quelconque.*

*Lorsque les droites  $p_i$  qui relient les points  $P_i \equiv (l, a_i)$  aux  
sommets  $A'_i$  du second triangle sont concourantes, il en est de  
même des droites  $p'_i$  qui relient les points  $P'_i \equiv (l, a'_i)$  aux  
sommets  $A_i$  du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la droite sphérique  $l$  est  $\mathbf{r}$  et si les  
vecteurs des sommets  $A_i$  et  $A'_i$  sont  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  et  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  nous  
aurons successivement pour les points  $P_i, P'_i$  et les droites  
 $p_i, p'_i$  :

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{bc} & P'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \\ p_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} & p'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.

L'identité nous montre que les  $p_i$  sont concourantes lorsque les  $p'_i$  le sont. q. e. d.

2. Nous pouvons cependant tirer de notre identité un théorème tout différent en interprétant le vecteur  $\mathfrak{r}$  non pas comme correspondant à une droite sphérique, mais comme appartenant à un point P. Le théorème en question est le suivant :

*Par un point quelconque de la surface sphérique P( $\mathfrak{r}$ ) on mène des normales  $p_i$  et  $p'_i$  aux côtés  $a_i$  et  $a'_i$  de deux triangles sphériques et ensuite par les sommets  $A'_i$  et  $A_i$  des droites sphériques  $q_i$  et  $q'_i$  normales aux  $p_i$  et  $p'_i$ . Lorsque les  $q_i$  sont concourantes, il en est de même des  $q'_i$ .*

En effet on trouve dans ce cas pour les vecteurs des droites  $p_1$ ,  $p'_1$  et  $q_1$ ,  $q'_1$  immédiatement

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{bc} & p'_1 &\equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \\ q_1 &\equiv V\mathfrak{a}', \mathfrak{r}, \mathfrak{bc} & q'_1 &\equiv V\mathfrak{a}, \mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \end{aligned}$$

Lorsque les  $q_i$  sont concourantes, le produit pseudo-scalaire du premier terme de notre identité s'annule; la disparition du second terme qui en est la conséquence montre que dans ce cas les  $q'_i$  aussi sont concourantes et inversement. q. e. d.

3. Dans le cas-limite du plan nous aurons, quel que soit le point P, la droite  $p_1$  normale à  $a_1$  et  $q_1$  de nouveau normale à  $p_1$ , c'est-à-dire  $q_1$  parallèle au côté  $a_1$  du premier triangle. Le théorème qui, pour le plan, est dû à M. J. Neuberg<sup>1</sup>, peut être formulé :

*Etant donnés deux triangles plans  $A_i$  et  $A'_i$  et les droites  $q_i$  et  $q'_i$  menées par les sommets  $A'_i$  et  $A_i$  parallèles aux côtés  $a_i$  et  $a'_i$ ; lorsque les droites  $q_i$  sont concourantes, il en est de même des droites  $q'_i$ <sup>2</sup>.*

29. — Nous arrivons à une autre identité entre sept vecteurs en remplaçant  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a}'$ , ... par  $V\mathfrak{bc}$ ,  $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ , ... , en posant ensuite

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathfrak{bra}'] & \lambda_2 &= [\mathfrak{ctb}'] & \lambda_3 &= [\mathfrak{arc}'] \\ \mu_1 &= [\mathfrak{cra}'] & \mu_2 &= [\mathfrak{atb}'] & \mu_3 &= [\mathfrak{brc}'] \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Mathesis*, 1882, p. 144, 1883, p. 86, 1914, p. 91.

<sup>2</sup> Voir par 23, 3.

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 Vca + \mu_1 Vab = Va, Vra'Vbc$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} & [a'b'c']^2 [Va, Vra'Vbc \quad Vb, Vrb'Vca \quad Vc, Vrc'Vab] \\ & + [abc]^2 [Va', VraVb'c' \quad Vb', VrbVc'a' \quad Vc', VrcVa'b'] \equiv 0. \end{aligned}$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit  $P(\mathfrak{r})$  un point quelconque de la surface sphérique; soient

$$\begin{aligned} A_i &\equiv a, b, c & A'_i &\equiv a', b', c' \\ a_i &\equiv Vbc, Vca, Vab & a'_i &\equiv Vb'c', Vc'a', Va'b' \end{aligned}$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point  $P$  aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_1 \equiv VVra'Vbc \quad Q'_1 \equiv VVraVb'c'$$

etc., et l'identité nous apprend: lorsque les droites  $(A_i, Q_i)$  sont concourantes, les droites  $(A'_i, Q'_i)$  le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant  $\mathfrak{r}$  comme le vecteur d'une droite.

## VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[Vaa' Vbb' Vcc'] + [Vbc' Vca' Vab'] + [Vcb' Vac' Vba'] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient  $A_1, A_2, A_3$  les sommets d'un triangle sphérique,  $P$  un point quelconque de la surface sphérique,  $p_1, p_2, p_3$  les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}; \quad P_{21}, P_{22}, P_{23}; \quad P_{31}, P_{32}, P_{33};$$