VII

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 V\mathfrak{ca} + \mu_1 V\mathfrak{ab} = V\mathfrak{a}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{a}'V\mathfrak{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{a}'V\mathfrak{bc} \quad V\mathfrak{b}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{b}'V\mathfrak{ca} \quad V\mathfrak{c}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{c}'V\mathfrak{ab}]\\ &+ [\mathfrak{abc}]^2[V\mathfrak{a}'\,,\ V\mathfrak{ra}V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}'\,,\ V\mathfrak{rb}V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}'\,,\ V\mathfrak{rc}V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0\,.\end{aligned}$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit $P(\mathfrak{r})$ un *point* quelconque de la surface sphérique; soient

$$A_i \equiv \mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{b}\,,\ \mathfrak{c} \qquad A_i' \equiv \mathfrak{a}'\,,\ \mathfrak{b}'\,,\ \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv V\mathfrak{bc}\,,\ V\mathfrak{ca}\,,\ V\mathfrak{ab} \qquad a_i' \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,,\ V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\,,\ V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point P aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_1 \equiv VV\mathfrak{r}\mathfrak{a}'V\mathfrak{bc} \qquad Q_1' \equiv VV\mathfrak{ra}V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

etc., et l'identité nous apprend : lorsque les droites (A_i, Q_i) sont concourantes, les droites (A_i', Q_i') le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant $\mathfrak{r}$ comme le vecteur d'une *droite*.

VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[V\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\ V\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\ V\mathfrak{c}\mathfrak{c}'] + [V\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\ V\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\ V\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathfrak{c}\mathfrak{b}'\ V\mathfrak{a}\mathfrak{c}'\ V\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 *les sommets d'un triangle sphérique,* P *un point quelconque de la surface sphérique,* p_1, p_2, p_3 *les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points*

$$P_{11}\,,\ P_{12}\,,\ P_{13}\,;\quad P_{21}\,,\ P_{22}\,,\ P_{23}\,;\quad P_{31}\,,\ P_{32}\,,\ P_{33}\,;$$

soient q_1, q_2, q_3 *les droites qui relient le même point* P *aux sommets du triangle et*

$$q_{11}\ ,\ q_{12}\ ,\ q_{13}\ ;\qquad q_{21}\ ,\ q_{22}\ ,\ q_{23}\ ;\qquad q_{31}\ ,\ q_{32}\ ,\ q_{33}$$

les neuf normales qui, des trois sommets, peuvent être abaissées sur les droites q_1, q_2, q_3.

Il y a en général sur la sphère trois points P *tels que sont collinéaires les points de chacun des systèmes :*

$$P_{11}\ ,\ P_{22}\ ,\ P_{33}\ ;\qquad P_{12}\ ,\ P_{23}\ ;\ P_{31}\ ;\qquad P_{13}\ ,\quad P_{21}\ ,\ P_{32}$$

et que sont concourantes les droites de chacun des systèmes :

$$q_{11}\ ,\ q_{22}\ ,\ q_{33}\ ;\qquad q_{12}\ ,\ q_{23}\ ,\ q_{31}\ ;\qquad q_{13}\ ,\ q_{21}\ ,\quad q_{32}\ .$$

Dans le plan il n'y a qu'un point qui possède toutes ces propriétés, c'est le point de Tarry du triangle N (fig. 2 et 3).

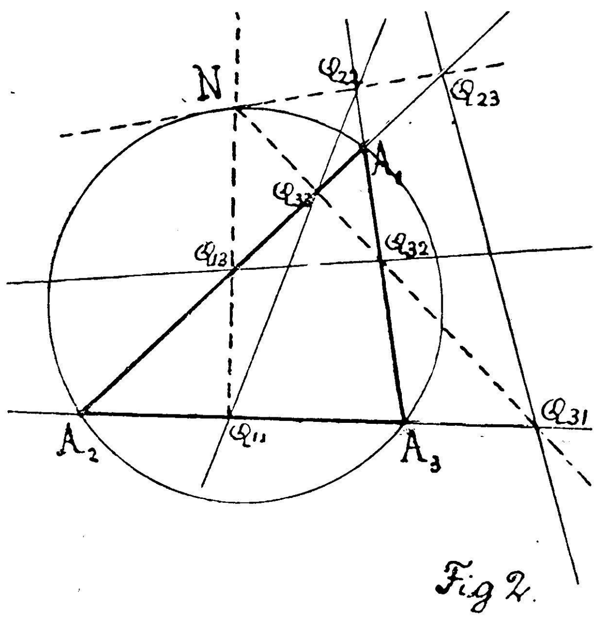

Fig 2.

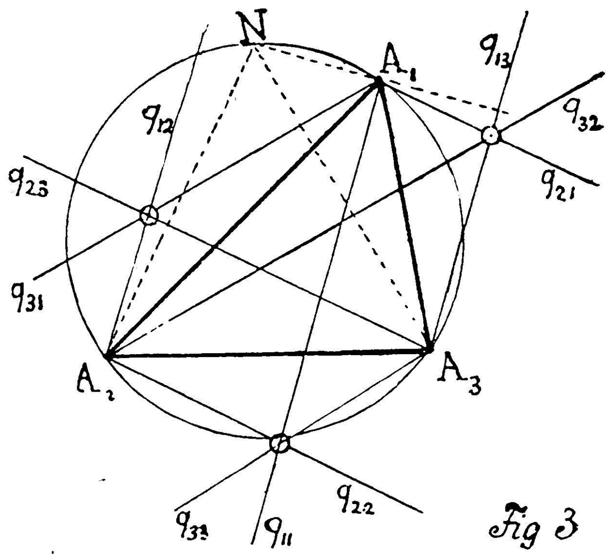

Fig 3

31. — D'ailleurs ce théorème se trouve comme cas spécial d'un théorème plus général encore, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient $A_1A_2A_3$ et $A'_1A'_2A'_3$ les sommets de deux triangles sphériques, P un point quelconque de la surface sphérique, $p_1p_2p_3$ les droites qui relient le point aux sommets du premier et $p'_1p'_2p'_3$ les droites qui le relient aux sommets du second triangle. Les droites p_1, p_2, p_3 rencontrent les côtés du second triangle en neuf points

$$P_{11}\ ,\ P_{12}\ ,\ P_{13}\ ;\qquad P_{21}\ ,\ P_{22}\ ,\ P_{23}\ ;\qquad P_{31}\ ,\ P_{32}\ ,\ P_{33}\ .$$

De même les droites p'_1, p'_2, p'_3 rencontrent les côtés du premier triangle en neuf points

$$P'_{11}\ ,\ P'_{12}\ ,\ P'_{13}\ ;\quad P'_{21}\ ,\ P'_{22}\ ,\ P'_{23}\ ;\quad P'_{31}\ ,\ P'_{32}\ ,\ P'_{33}\ .$$

Il y a pour tout couple de triangles sphériques ou plans en général trois points P tels que sont collinéaires les points de chacun des six systèmes :

$$P_{11}\ ,\ P_{22}\ ,\ P_{33}\ ;\quad P_{12}\ ,\ P_{23}\ ,\ P_{31}\ ;\quad P_{13}\ ,\ P_{21}\ ,\ P_{32}$$
$$P'_{11}\ ,\ P'_{22}\ ,\ P'_{33}\ ;\quad P'_{12}\ ,\ P'_{23}\ ,\ P'_{31}\ ;\quad P'_{13}\ ,\ P'_{21}\ ,\ P'_{32}\ .$$

Nous revenons sur la démonstration de ces deux théorèmes dans un article ultérieur.

PENSÉE AXIOMATIQUE[1]

PAR

David HILBERT (Göttingue).

Dans la vie des sociétés la prospérité des peuples dépend de celle de tous ses voisins ; les Etats, de même, ont un intérêt vital à ce que l'ordre non seulement règne à l'intérieur de chacun d'eux, mais existe aussi dans leurs relations mutuelles. Il n'en va pas autrement dans la vie des sciences. Preuve en soit le vif intérêt que les représentants les plus remarquables de la pensée mathématique ont toujours témoigné à la structure et aux lois des autres sciences que la leur ; ils n'ont cessé avant tout d'étudier les mathématiques (et pour le plus grand bien de ces dernières) dans leurs rapports avec les vastes

[1] *Axiomatisches Denken*, conférence faite à la reunion annuelle de la Société mathématique suisse, tenue à Zurich, le 11 septembre 1917. — Traduction de M. Arnold REYMOND, professeur à l'Université de Neuchâtel.