

# L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

Autor(en): **de la Vallée Poussin, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18019>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE<sup>1</sup>

PAR

C. de la VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain.

## 1. — Le problème de l'approximation.

L'approximation des fonctions de variables réelles a fait l'objet de recherches récentes (1898-1913). J'en ai suivi les dernières avec d'autant plus d'intérêt que j'avais contribué dans une certaine mesure à les provoquer. Je me propose de donner ici une idée sommaire de cette nouvelle théorie. J'espère qu'elle suffira pour faire saisir les problèmes les plus caractéristiques qui se posent et la nature des procédés mis en œuvre pour les résoudre. Je me guiderai dans mon exposé sur l'ordre historique des découvertes; mais je me bornerai aux fonctions d'une seule variable, faute de temps. On se gardera d'en conclure que la théorie des fonctions de plusieurs variables manque actuellement d'intérêt ou de résultats.

Je définis d'abord la question qui va nous occuper.

Il s'agit d'exprimer une fonction sous forme finie avec plus ou moins d'approximation. Mais les recherches actuelles ne portent que sur deux modes de représentation approchée : *La représentation par polynômes* et alors la représentation se fait dans un intervalle  $(a, b)$ , où l'on suppose la

---

<sup>1</sup> Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918.

Les numéros dans le texte renvoient à l'index bibliographique à la fin de l'article.

fonction continue; *la représentation trigonométrique*, auquel cas la fonction est supposée continue et périodique de période  $2\pi$ , la représentation s'étend alors à toutes les valeurs réelles de  $x$ .

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini  $n$ , c'est-à-dire par une suite limitée de la forme

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx ,$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynôme de degré  $n$  en  $\sin x$  et  $\cos x$ . Il y a lieu d'observer que si l'expression est paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynôme de degré  $n$  en  $\cos x$ .

Soient  $f(x)$  une fonction continue dans un intervalle  $(a, b)$  et  $P_n(x)$  un polynôme de degré  $n$  d'ailleurs quelconque. Ce polynôme doit être considéré comme une expression approchée de  $f(x)$ . Le maximum dans  $(a, b)$  de la différence absolue

$$|f(x) - P_n|$$

est *l'approximation* fournie par  $P_n$ . Ce polynôme est d'autant meilleur comme expression approchée qu'il fournit une approximation plus petite. Si l'on considérait une fonction périodique et sa représentation trigonométrique, l'approximation se définirait de la même manière.

Le *problème de l'approximation* consiste à former une expression de l'un ou de l'autre de ces deux types dont *l'approximation soit aussi petite qu'on le veut*. Le problème est possible dans les deux cas. Il y a là deux *théorèmes d'existence*, tous deux dus à Weierstrass (1885), et qui ont été le point de départ de la théorie qui nous occupe. Il y a lieu de nous y arrêter quelques instants.

## 2. — Les deux théorèmes d'existence de Weierstrass.

Weierstrass a démontré les deux théorèmes suivants (1):

I. *Toute fonction continue dans un intervalle  $(a, b)$  peut*

être développée en série uniformément convergente de polynômes dans cet intervalle.

II. Toute fonction continue de période  $2\pi$  peut être développée en série uniformément convergente d'expressions trigonométriques finies.

Il est à peine besoin de faire observer que le problème du développement en série est le même que celui de l'approximation indéfinie. Par exemple, si l'on a un développement en série uniformément convergente de polynômes

$$f(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots,$$

on en déduit un polynôme aussi approché qu'on le veut en sommant un nombre suffisant de termes de la série. Réciproquement, si l'on sait former un polynôme  $P_n$  aussi approché qu'on le veut, le développement en série s'obtient par la formule

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots$$

Les théorèmes I et II se ramènent réciproquement l'un à l'autre. J'y insisterai dans le paragraphe suivant. Mais, depuis Weierstrass, on les a prouvés directement l'un et l'autre de bien des manières. Je vais signaler quelques-unes de ces démonstrations et faire quelques observations d'un ordre général.

La plus simple peut-être des démonstrations du théorème II est celle de M. Volterra (2): On peut approcher autant qu'on veut d'une courbe continue à l'aide d'une ligne polygonale. Une telle ligne représente une fonction qui, n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima, peut, d'après Dirichlet, être développée en série de Fourier uniformément convergente. On sommera un nombre suffisant de termes de cette série et l'on obtiendra l'approximation demandée.

Les autres démonstrations du théorème II se rattachent, comme celle-ci, à la série de Fourier. Elles utilisent l'un ou l'autre des divers procédés de sommation de cette série qui assurent la convergence, soit le procédé de sommation de Poisson comme celle que M. Picard a donnée dans son *Traité*

d'Analyse, soit le procédé de la moyenne arithmétique, ce qui est préférable, car ce procédé, qui est celui de M. Féjer, donne, du premier coup, une somme trigonométrique finie. Enfin j'ai indiqué moi-même (3) en 1908 un troisième procédé qui présente le même avantage que celui-ci.

Passons au théorème I. Weierstrass le démontre par la considération de l'intégrale

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_a^b f(t) e^{-n(t-x)^2} dt ,$$

qui, pour  $n$  assez grand, s'approche autant qu'on veut de  $f(x)$  dans l'intervalle  $(a, b)$ . Mais il vaut mieux, comme M. Landau l'a fait le premier (4), définir directement un polynôme approché par la formule

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t) [1 - (t-x)^2]^n dt ,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt .$$

Nous reviendrons plus loin sur ce polynôme  $P_n$ , que nous appellerons *polynôme de Landau*.

Ces démonstrations font appel au calcul intégral et ont une allure synthétique. On doit à M. Lebesgue une démonstration, qui ne va pas au delà du théorème de Weierstrass, mais qui est très instructive par son caractère strictement analytique. Elle réduit le problème à ses éléments irréductibles, ce qui permet de le résoudre avec un minimum de moyens. Elle a été publiée (5) en 1898, dans une courte Note, la première qui ait été écrite par l'illustre mathématicien français. Dans cette Note, intéressante à plusieurs titres, M. Lebesgue ramène la démonstration du théorème I pour une fonction continue quelconque, à la démonstration dudit théorème pour la seule fonction particulière  $|x|$ .

M. Lebesgue emprunte d'abord à M. Volterra la réduction

de l'approximation d'une fonction continue quelconque à celle d'une ligne polygonale. Voici maintenant comment il ramène l'approximation d'une telle ligne à celle de  $|x|$ .

Soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$  les sommets de la ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses  $x_1$  et  $x_n$ . Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

est nulle pour  $x \leq x_k$  et égale à  $2(x - x_k)$  pour  $x \geq x_k$ .

Posons

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont  $n$  constantes à déterminer. Cette fonction varie linéairement entre deux abscisses consécutives  $x_k$  et  $x_{k+1}$ . Donc, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit d'amener la coïncidence des sommets. Faisons  $x = x_i$ , nous obtenons ainsi la condition

$$y_i = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k)$$

Ceci constitue, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , un système récurrent, qui détermine de proche en proche  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . Ainsi l'approximation de l'ordonnée  $F(x)$  de la ligne polygonale est ramenée à celle de  $\varphi_k(x)$  ou de  $|x - x_k|$  et, en définitive, à celle de  $|x|$ .

### 3. — Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre.

Les deux modes d'approximation se ramènent l'un à l'autre, l'approximation par polynômes à une approximation trigonométrique et, inversement, l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes.

Les deux problèmes ont été résolus dès le début, mais le problème direct, qui a pour objet de déduire l'approximation par polynômes d'une approximation trigonométrique, est le

plus simple. On en trouve déjà une solution très naturelle dans le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard. Elle consiste à remplacer, dans le développement trigonométrique suffisamment approché, chacune des lignes trigonométriques par un polynôme suffisamment approché tiré de la formule de Taylor. Mais, malgré sa simplicité, ce procédé n'est pas le meilleur. Il en existe un autre, bien plus parfait, qui fait rentrer l'approximation par polynômes comme simple cas particulier dans l'approximation trigonométrique. Il est même étonnant que ce procédé n'ait été utilisé que si tardivement. C'est M. Bernstein qui en a montré les avantages dans son Mémoire couronné de 1912 (6).

Soit à représenter une fonction continue  $f(x)$  par des polynômes dans l'intervalle  $(-1, +1)$ . Tout autre intervalle se ramènerait à celui-là par une substitution linéaire. Posons, avec M. Bernstein,

$$x = \cos \varphi ,$$

ce qui transforme  $f(x)$  en  $f(\cos \varphi)$ , qui est une fonction paire et périodique de  $\varphi$ . Je dis que *l'approximation de  $f(x)$  par des polynômes en  $x$  et celle de  $f(\cos \varphi)$  par des expressions trigonométriques en  $\varphi$ , sont deux problèmes complètement équivalents.*

Supposons, en effet, que nous ayons, avec une certaine approximation, la représentation trigonométrique

$$f(\cos \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_n \cos n \varphi ;$$

et remarquons que  $\cos k\varphi$  est un polynôme,  $T_k(\cos \varphi)$ , de degré  $k$  en  $\cos \varphi$ . Nous aurons, avec la même approximation, la représentation par polynômes que nous cherchons

$$f(x) = a_0 + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) .$$

Les polynômes  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$ , ... sont ce que M. Bernstein appelle des *polynômes trigonométriques*. Ils ont été considérés, bien avant lui, par le grand mathématicien russe Tchebycheff (7) (1859), qui en a signalé des propriétés de la plus haute importance pour notre objet. M. Bernstein en a tiré le plus heureux parti. En particulier, il a montré, dans

son Mémoire cité, les avantages inattendus que présente le développement de  $f(x)$  en série de polynômes trigonométriques, et il appelle ainsi la série de polynômes qui se déduit de la série de Fourier de  $f(\cos \varphi)$  par la transformation précédente. C'est ainsi, entre autres, qu'il a effectué le développement de  $|x|$  en série de polynômes et il a obtenu, pour cette fonction, la meilleure représentation connue jusqu'à lui.

La substitution de M. Bernstein possède, au point de vue de notre étude, un avantage sur l'importance duquel il faut insister : elle n'altère pas les propriétés différentielles. La fonction  $x = \cos \varphi$  est continue ainsi que toutes ses dérivées, de sorte que si les dérivées d'un certain ordre de  $f(x)$  sont continues par rapport à  $x$ , elles le sont encore par rapport à  $\varphi$ . Grâce à cette continuité, la substitution de Bernstein ne jette aucun trouble dans l'étude combinée de l'approximation et des propriétés différentielles de  $f(x)$ . Aussi bien, plus tard, quand nous ferons cette étude, il nous suffira de parler de l'approximation trigonométrique. Tous les résultats peuvent se traduire dans l'autre mode par la substitution précédente.

Le problème inverse ne présente pas les mêmes facilités. Il a pour objet de ramener l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes. Il a d'abord été traité par M. Lebesgue dans son premier Mémoire de 1898 (5). Il se résout naturellement par la substitution  $u = \cos x$ , inverse de celle de Bernstein, et que nous appellerons *la substitution de Lebesgue*. Mais celle-ci se heurte immédiatement à deux objections.

La première, c'est que  $x$  et, par suite,  $f(x)$  ne sont pas des fonctions uniformes de  $\cos x = u$ ; la seconde vient de la discontinuité des dérivées de  $x = \arccos u$  par rapport à  $u$  aux deux limites  $\pm 1$ , ce qui change les propriétés différentielles de la fonction.

M. Lebesgue a résolu la première difficulté dans son Mémoire de 1898. La seconde ne se posait pas encore à cette époque. Elle a été résolue, au moins partiellement, par M. D. Jackson dans sa dissertation inaugurale de 1911 (8). M. Jackson précise pour cela la méthode de M. Lebesgue,



mais il se borne à la considération d'un nombre limité de dérivées successives.

Je n'exposerai pas ces démonstrations telles quelles. Je vais les remplacer par deux autres, qui s'inspirent au fond des mêmes idées, mais qui me paraissent plus simples.

Voici d'abord comment je modifierais la démonstration de M. Lebesgue, en vue de tourner la première difficulté seulement.

Soit  $f(x)$  une fonction continue de période  $2\pi$ ; les deux fonctions

$$f(x) + f(-x), \quad [f(x) - f(-x)] \sin x,$$

sont des fonctions paires de période  $2\pi$ , donc des fonctions *uniformes* de  $\cos x = u$ , que nous pouvons désigner par  $\varphi(u)$  et  $\psi(u)$  et la multiplicité des valeurs de arc  $\cos x$  n'intervient pas. Je dis que l'approximation trigonométrique de  $f(x)$  revient à l'approximation par polynômes de  $\varphi(u)$ , de  $\psi(u)$  et de deux autres fonctions analogues.

Soient, en effet,  $P_n(u)$  et  $Q_n(u)$  des polynômes de degré  $n$  tels qu'on ait approximativement

$$\varphi(u) = P_n(u), \quad \psi(u) = Q_n(u);$$

on aura, avec la même approximation,

$$\begin{aligned} [f(x) + f(-x)] \sin^2 x &= P_n(\cos x) \sin^2 x, \\ [f(x) - f(-x)] \sin^2 x &= Q_n(\cos x) \sin x, \end{aligned}$$

d'où la relation approchée

$$2f(x) \sin^2 x = P_n(\cos x) \sin^2 x + Q_n(\cos x) \sin x. \quad (1)$$

Remplaçons, dans le calcul précédent, la fonction  $f(x)$  par la fonction  $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ; il viendra approximativement,  $R_n(u)$  et  $S_n(u)$  étant de nouveaux polynômes,

$$2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x = R_n(\cos x) \sin^2 x + S_n(\cos x) \sin x$$

et, en changeant  $x$  en  $x - \frac{\pi}{2}$ ,

$$2f(x) \cos^2 x = R_n(\sin x) \cos^2 x - S_n(\sin x) \cos x. \quad (2)$$

Il suffit d'ajouter membre à membre les deux relations approchées (1) et (2) et l'on obtient l'expression trigonométrique approchée de  $f(x)$ .

Il n'est pas difficile de modifier cette démonstration de manière à écarter la seconde difficulté, dans la mesure même où elle a été surmontée par M. D. Jackson. Voici la manière de procéder :

Supposons que  $f(x)$  et ses dérivées soient continues jusqu'à l'ordre  $r$ . Il s'agit de ramener l'approximation trigonométrique de  $f(x)$  à l'approximation par polynômes de certaines fonctions de  $u$  ayant des dérivées en  $u$  continues jusqu'à l'ordre  $r$ . Toute la difficulté provient de la présence de  $\sin x$  qui s'annule au dénominateur de la formule de dérivation :

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{d \cos x} = - \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} .$$

Il suffit, pour la faire disparaître, d'introduire  $\sin^r x$  en facteur dans la définition des fonctions  $\varphi(u)$  et  $\psi(u)$  qui précèdent. Cela permet, en effet, de faire disparaître, comme facteur commun aux deux termes de la fraction, cette expression  $\sin x$  qui provoque la difficulté.

Posons donc

$$\varphi(u) = [f(x) + (-1)^r f(-x)] \sin^r x ,$$

$$\psi(u) = [f(x) - (-1)^r f(-x)] \sin^{r+1} x .$$

Soient  $P_n(u)$  et  $Q_n(u)$  des polynômes approchés de  $\varphi(u)$  et de  $\psi(u)$  ; on aura, comme dans le cas précédent,

$$2f(x) \sin^{r+1} x = P_n(\cos x) \sin x + Q_n(\cos x) ;$$

ensuite, toujours comme précédemment,

$$2f(x) \cos^{r+1} x = R_n(\sin x) \cos x + S_n(\sin x) .$$

Or on peut toujours déterminer deux polynômes A et B en  $\sin x$  et  $\cos x$  vérifiant l'identité

$$A \sin^{r+1} x + B \cos^{r+1} x = 1 .$$

On ajoute les deux relations précédentes multipliées res-

pectivement par A et B, on obtient la représentation trigonométrique cherchée.

Ce procédé ne résout pas la difficulté, si l'on considère des fonctions indéfiniment dérivables. Cela fait, entre les deux problèmes inverses que nous venons de traiter, une différence qui reste profonde. La solution du premier est plus radicale que celle du second.

#### 4. — Dérivabilité de la représentation. Ordre de l'approximation.

Ces deux questions sont liées par d'étroites relations, qui n'ont été éclaircies que récemment et que nous approfondirons dans un autre paragraphe (6). Cependant, sans que leur dépendance ait été aperçue dès le début, elles ont été traitées dans les mêmes Mémoires et, plus tard, on en a fait l'étude combinée. Il est impossible de les séparer.

Nous allons donc les étudier ensemble, mais en nous bornant pour le moment à la seule approximation par polynômes.

La question de représenter  $f(x)$  par une série dérivable de polynômes a été posée par M. Painlevé dès 1898. M. Painlevé a montré que si la fonction  $f(x)$  a des dérivées continues, elle est exprimable en série uniformément convergente de polynômes, telle que les séries dérivées convergent aussi uniformément vers les dérivées de  $f(x)$ . M. E. Borel est revenu sur cette question dans sa Thèse et dans ses *Leçons* de 1905 sur les fonctions de variables réelles.

La question de l'ordre de l'approximation est plus récente. Elle a été posée en 1908 par M. Lebesgue (10), à l'occasion du polynôme de Landau,

$$P_n = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t) [1 - (t - x)^2]^n dt ,$$

qui, pour  $n$  infini, converge uniformément vers  $f(x)$  dans tout intervalle  $(a, b)$  intérieur à  $(0, 1)$ .

Le maximum de  $|f - P_n|$ , ou l'approximation  $\rho_n$ , tend vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ , mais *quel est l'ordre de grandeur de  $\rho_n$ ?*

Telle est la question de l'ordre de l'approximation que M. Lebesgue s'est posée, mais n'a traitée que très sommairement dans ce premier article.

Je m'étais posé la même question, avant la publication de la Note de M. Lebesgue, et mes résultats ont paru, peu après, dans un Mémoire étendu (3) de l'Académie royale de Belgique (1908). Les deux questions, dérivabilité et ordre de l'approximation, reçoivent ici des solutions plus précises que dans les travaux précédents. Je prouve, en particulier, que le problème de la dérivabilité est entièrement résolu par le polynôme de Landau. En effet, *une dérivée d'ordre quelconque de  $P_n$  converge vers la dérivée du même ordre de  $f(x)$  au point  $x$ , sous la seule condition que cette dérivée existe en ce point.* C'est là la supériorité du polynôme de Landau : *La continuité de la dérivée n'est pas requise.* Les autres procédés que nous allons étudier seront, sans doute, beaucoup plus parfaits au point de vue de l'approximation, mais ils perdent cet avantage : les conditions de leur dérivabilité exigent la continuité.

C'est encore dans mon Mémoire cité de 1908 que se trouvent les premiers résultats définitifs sur l'ordre de l'approximation. Je prouve que *si la fonction  $f(x)$  est lipschitzienne, l'approximation obtenue par le polynôme de Landau est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  au plus.*

Cette approximation n'est pas la meilleure qu'on puisse obtenir dans cette hypothèse générale. M. Lebesgue, en 1910 (11), a obtenu l'ordre  $\frac{\log n}{n}$  et enfin, en 1911, M. D. Jackson (8) a obtenu l'ordre  $\frac{1}{n}$ , qui ne peut plus être abaissé. Je vais y revenir. Cependant j'ai donné moi-même le premier exemple d'une meilleure approximation dans un autre Mémoire (12), présenté à l'Académie royale de Belgique la même année 1908 et publié le mois suivant. Prenant cette fois mon point de départ dans l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt,$$

qui jouit de propriétés analogues à celles de Dirichlet, j'ai montré que toute fonction dont la dérivée est à variation bornée peut être représentée par un polynôme de degré  $n$  avec une approximation de l'ordre de  $\frac{1}{n}$ . C'était, je pense, le premier exemple d'un ordre qui ne peut plus être abaissé.

Toutefois, comme je viens de le dire, on peut assigner une approximation du même ordre dans l'hypothèse, bien plus générale, où la fonction  $f(x)$  est lipschitzienne. Mais ceci n'a été démontré que trois ans plus tard et c'est un cas particulier d'un théorème plus général que M. D. Jackson (8) a énoncé dans sa dissertation inaugurale de 1911. M. D. Jackson consacre un chapitre entier de cette dissertation à l'approximation simultanée de  $f(x)$  et de ses  $k - 1$  premières dérivées dans l'hypothèse où la dernière est lipschitzienne. Il raisonne pour cela sur une combinaison ingénieuse d'intégrales absolument convergentes du type

$$\int f(x + \lambda t) \left( \frac{\sin nt}{t} \right)^k dt,$$

où  $\lambda$  et  $k$  sont des entiers, ce dernier suffisamment grand. Il construit un polynôme qui fournit une approximation de l'ordre de  $\frac{1}{n^k}$  et dont la dérivée d'ordre  $r \leq k$  fournit, pour  $f^{(r)}(x)$ , une approximation de l'ordre de  $\frac{1}{n^{k-r}}$ . En particulier, on obtient le résultat énoncé plus haut si  $k = 1$  : l'approximation de  $f(x)$  lipschitzienne est de l'ordre de  $\frac{1}{n}$ .

Ces théorèmes de M. D. Jackson sont définitifs, mais pour les fonctions seulement qui n'admettent qu'un nombre limité de dérivées successives. Ils n'ont plus rien de commun avec la meilleure approximation quand toutes les dérivées existent.

Si la fonction  $f(x)$  est indéfiniment dérivable, la méthode du développement en série de polynômes trigonométriques, que M. Bernstein (6) a utilisée dans son Mémoire couronné (1912), est plus simple et bien préférable. Ce développement qui, comme nous l'avons vu, se déduit de celui de  $f(\cos \varphi)$  en série de Fourier, donne la meilleure solution connue de

la représentation indéfiniment dérivable. Dans cette hypothèse, l'approximation de chaque dérivée est indéfiniment petite d'ordre supérieur à toute puissance de  $\frac{1}{n}$ . Réciproquement, l'existence d'un tel degré d'approximation assure celle de toutes les dérivées. Nous en reparlerons plus loin.

### 5. — Approximation minimum.

Soit  $f(x)$  une fonction continue dans un intervalle  $(a, b)$ . Parmi les polynômes de degré donné  $n$ , il en existe un,  $P_n$ , qui donne la meilleure approximation, tel donc que l'approximation soit minimum. Nous appellerons cette meilleure approximation *approximation minimum*, et le polynôme qui la donne est le *polynôme d'approximation* (ou d'approximation minimum).

La considération de ce polynôme remonte à une époque déjà ancienne, elle est due à Tchebycheff (7) (1859). Le grand géomètre russe a consacré une partie importante de son œuvre à l'étude de l'approximation par des fonctions rationnelles (entières ou fractionnaires). Mais l'importance des découvertes de Tchebycheff pour notre objet actuel n'est apparue qu'après le Mémoire de M. S. Bernstein (1912). Tant pour la valeur des matériaux réunis que par le mérite de l'invention, la place qui revient à Tchebycheff dans la théorie qui nous occupe est encore la première.

Tchebycheff, comme cela était naturel de son temps, admettait sans démonstration l'existence du polynôme d'approximation minimum. Cette démonstration a été donnée par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les séries de polynômes* (1905) (13). M. Borel a montré que le polynôme d'approximation minimum dans un intervalle  $(a, b)$  est unique et qu'il est caractérisé par la propriété suivante : la différence  $f(x) - P_n$  acquiert sa valeur absolue minimum avec des signes alternés en  $n + 2$  points consécutifs de l'intervalle  $(a, b)$ . Ce maximum absolu est l'*approximation minimum*  $\rho_n$ . Il suit de cette propriété que le polynôme d'approximation est un *polynôme de Lagrange*

qui coïncide avec  $f(x)$  en  $n + 1$  points (au moins) de l'intervalle  $(a, b)$ . J'ai donné en 1910 (14) à ces points de coïncidence le nom de *nœuds* et le polynôme de Lagrange est défini par ses nœuds.

Le calcul exact du polynôme d'approximation minimum n'est possible que dans des cas très exceptionnels. Mais il existe divers procédés de calcul qui permettent d'en approcher autant qu'on veut. Ces procédés sont dus à M. Borel (13), à moi-même (14) et à M. Bernstein (6). Ces procédés reviennent tous à former successivement des polynômes de Lagrange de plus en plus avantageux en améliorant progressivement le choix des nœuds.

Dans l'état actuel de la théorie, c'est l'approximation minimum qu'il importe surtout de connaître plutôt que le polynôme d'approximation lui-même. Faute d'un calcul exact, il convient donc d'avoir des règles précises pour enfermer l'approximation minimum entre des limites suffisamment resserrées. Ce sont ces règles qui méritent de fixer maintenant notre attention.

La détermination d'une borne supérieure est chose immédiate. Tout polynôme donné  $Q_n$  de degré  $n$  en fournit une, à savoir le maximum de  $|f - Q_n|$ .

La détermination d'une borne inférieure demande un peu plus de réflexion. Mais j'ai donné dans mon Mémoire de 1910 (14) une règle, qui m'a paru intéressante, en vertu de laquelle un polynôme de Lagrange de degré  $n$  fournit généralement une telle borne.

Voici d'abord cette règle :

*Soit  $Q_n$  un polynôme de degré  $n$ ; si la différence  $f(x) - Q_n$  prend, en  $n + 2$  points consécutifs et avec des signes alternés, des valeurs absolues  $\geq \rho$ , alors  $\rho$  est une borne inférieure de l'approximation minimum.*

En particulier, si  $Q_n$  est un polynôme de Lagrange à  $n + 1$  nœuds, ces  $n + 1$  nœuds partagent  $(a, b)$  en  $n + 2$  intervalles, où  $f - Q_n$  est (sauf exception) de signe alterné. Dans chaque intervalle,  $f - Q_n$  passe par un maximum absolu et le plus petit  $\rho$  de ces maxima absolus est une borne inférieure de l'approximation minimum.

La démonstration de notre règle est presque immédiate. Soit  $P_n$  le polynôme d'approximation et  $\rho_n$  l'approximation minimum; si l'on avait  $\rho_n < \rho$ , le polynôme de degré  $n$ ,

$$P_n - Q_n = (f - Q_n) - (f - P_n),$$

changerait de signe  $n + 2$  fois au moins dans l'intervalle  $(a, b)$  et aurait, par conséquent,  $n + 1$  racines au moins, ce qui est impossible.

M. Bernstein a généralisé notre théorème dans son Mémoire couronné de 1912 (6). Il l'a étendu au cas où les polynômes sont formés avec des puissances de  $x$  dont les exposants font partie d'une suite de nombres positifs (entiers ou non) qui sont assignés d'avance. Il s'est servi de ce théorème généralisé pour trouver une borne inférieure de la meilleure approximation de  $|x|$ .

La règle précédente présente le grand avantage d'avoir une efficacité illimitée. En effet, en essayant de nouveaux polynômes  $Q_n$ , on peut, théoriquement du moins, approcher autant qu'on veut de la valeur exacte de l'approximation. Il existe d'autres règles qui ont un caractère plus particulier et qui épuisent leur efficacité dès la première application, mais qui n'en sont pas moins très utiles, parce qu'elles sont dans bien des cas d'une application plus facile que la précédente. Je vais en signaler deux, qui s'appliquent directement à l'approximation trigonométrique et indirectement aux polynômes, grâce à la substitution de Bernstein. Il est à peine besoin de dire que les considérations précédentes sur la meilleure approximation par polynômes s'étendent *mutatis mutandis* à la meilleure approximation trigonométrique.

Considérons, avec M. Bernstein (1912), le développement de  $f(x)$  en série de polynômes trigonométriques ou, ce qui est exactement la même chose, le développement de  $f(\cos \varphi)$  en série de Fourier

$$f(\cos \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots$$

Soit  $S_n$  la somme des  $n + 1$  premiers termes, on sait que



les valeurs  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des constantes de Fourier sont celles qui minimisent l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(\cos \varphi) - S_n]^2 d\varphi .$$

Soit donc  $T_n$  la suite trigonométrique d'ordre  $n$  qui donne l'approximation minimum, on aura

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(\cos \varphi) - S_n]^2 d\varphi \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 d\varphi \geq 2\rho_n^2 ,$$

en vertu du théorème de la moyenne ( $\rho_n$  étant la valeur maximum absolue de  $f - T_n$ ). Mais la première intégrale a pour valeur

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [a_{n+1} \cos (n+1)\varphi + a_{n+2} \cos (n+2)\varphi + \dots]^2 d\varphi \\ = a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots . \end{aligned}$$

De là, la règle de M. Bernstein :

*Si l'on désigne par  $a_0, a_1, a_2, \dots$  les constantes de Fourier de  $f(\cos \varphi)$  la meilleure approximation  $\rho_n$  de  $f(x)$  dans l'intervalle  $(-1, +1)$  satisfait à la condition<sup>1</sup>*

$$\rho_n \geq \sqrt{\frac{1}{2} (a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots)} .$$

Il est clair d'ailleurs que l'on a, d'autre part,

$$\rho_n \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots ,$$

puisque cette approximation est donnée par la série de polynômes trigonométriques.

La seconde règle, qui est plus importante et qui est antérieure (1910), a été donnée par M. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les intégrales singulières* (15). Voici la règle de M. Lebesgue :

<sup>1</sup> Nous avons ajouté sous le radical le facteur  $\frac{1}{2}$  qui manque dans le texte de M. Bernstein.

Si la somme d'ordre  $n$  de la série de Fourier de la fonction périodique  $f(x)$  donne une approximation  $\varphi(n)$ , l'approximation trigonométrique minimum  $\rho_n$  satisfait à la condition

$$\rho_n > k \frac{\varphi(n)}{\log n},$$

où  $k$  est une constante numérique assignable a priori.

La démonstration repose sur les propriétés de l'intégrale de Dirichlet, mais, si simple qu'elle soit, elle ne peut trouver place ici.

Si l'on applique, par exemple, les deux règles précédentes à la fonction  $|x|$ , la règle de M. Bernstein prouve que  $\rho_n$  n'est pas d'ordre supérieur à  $\frac{1}{n\sqrt{n}}$  et celle de M. Lebesgue que  $\rho_n$  n'est pas d'ordre supérieur à  $\frac{1}{n \log n}$ . Dans ce cas, c'est la règle de Lebesgue qui l'emporte, mais il n'en est pas toujours ainsi.

## 6. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés différentielles.

La meilleure approximation  $\rho_n$  d'une fonction continue  $f(x)$  par un polynôme de degré  $n$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. C'est le théorème même de Weierstrass. J'ai posé en 1908 (12) la question de déterminer l'ordre de grandeur de  $\rho_n$  pour  $n$  infini et M. Bernstein a posé en 1912 (6) celle d'en déterminer la valeur asymptotique quand elle existe.

Aujourd'hui des résultats définitifs sont acquis et répondent à ces deux questions. Ils sont dus à M. Dunham Jackson (1911) et surtout à M. Bernstein (1912).

Un premier résultat essentiel est qu'il existe une dépendance étroite entre l'ordre de la meilleure approximation et l'existence des dérivées jusqu'à un ordre plus ou moins élevé.

L'existence d'une dérivée bornée d'un certain ordre assure une approximation d'un ordre correspondant et c'est M. Dunham Jackson (8) qui a trouvé les théorèmes les plus précis

sous ce rapport. Nous les avons exposés dans un article antérieur. Mais M. Jackson n'énonce aucun théorème réciproque et l'on ne sait pas si ces énoncés s'appliquent à l'approximation minimum. Seul M. Bernstein (6) est arrivé à des résultats positifs en ce sens et a su remonter de l'ordre de l'approximation obtenue aux propriétés différentielles de la fonction.

M. Bernstein n'y a d'ailleurs réussi qu'en s'inspirant des travaux de Tchebycheff et nous allons exposer de quelle manière. Nous donnerons d'ailleurs une idée suffisante de la question en nous bornant à l'approximation trigonométrique et en simplifiant un peu les données du problème.

Faire l'approximation trigonométrique de  $f(x)$  revient à effectuer un développement en série

$$f(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots$$

dont les termes sont des expressions trigonométriques d'ordres croissants et nous supposons, pour simplifier,  $P_n$  d'ordre  $n$ . Admettons que les termes de cette série soient, en valeur absolue, inférieurs à ceux de la série positive convergente

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$

La rapidité de l'approximation correspond à la convergence plus ou moins rapide de la série. D'autre part, l'existence des dérivées de  $f(x)$  découle de la possibilité de dériver la série. Or cette dérivation est légitime tant que les séries dérivées sont absolument et uniformément convergentes. Tout revient donc à avoir une règle pour conclure de l'ordre de grandeur de  $P_n$  à l'ordre de grandeur de ses dérivées. C'est cette règle que M. Bernstein a trouvée, en complétant certaines recherches de Tchebycheff, et cette règle est d'une simplicité et d'une précision inattendues. La voici :

*Si une expression trigonométrique d'ordre  $n$  est de module  $< L$  et que l'expression soit formée de sinus seuls ou de cosinus seuls, ses dérivées successives d'ordres 1, 2, 3, ... sont respectivement de modules  $< nL$ ,  $< n^2L$ ,  $< n^3L$ , ... Il suffit de doubler ces bornes si l'expression trigonométrique est de la forme générale.*

On voit d'après cela que, si la décroissance des quantités  $\varepsilon_n$  est suffisamment rapide pour assurer la convergence de la série

$$1^p \varepsilon_1 + 2^p \varepsilon_2 + \dots + n^p \varepsilon_n + \dots,$$

elle assure aussi l'existence de la dérivée d'ordre  $p$  de  $f(x)$ . Tel est réduit à ce qu'il a de plus essentiel le raisonnement de M. Bernstein.

Pour mettre en lumière la netteté des conclusions auxquelles conduisent les méthodes de M. Bernstein, donnons d'abord, avec cet habile géomètre, la définition suivante :

Nous dirons qu'une fonction continue  $\varphi(x)$  vérifie une *condition de Lipschitz d'ordre  $\alpha$*  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), s'il existe une constante  $M$  telle qu'on ait, quel que soit  $\delta$  positif,

$$|\varphi(x + \delta) - \varphi(x)| < M\delta^\alpha.$$

Considérons maintenant une fonction  $f(x)$  de période  $2\pi$  et son approximation trigonométrique d'ordre  $n$ . Nous avons le théorème suivant :

*Si  $f(x)$  admet une dérivée continue d'ordre  $p$ , laquelle satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), alors on peut assigner une constante  $M_1$  telle que l'approximation trigonométrique minimum,  $\rho_n$ , satisfasse, quel que soit  $n$ , à la condition*

$$\rho_n < \frac{M_1}{n^{p+\alpha}}.$$

*Réciproquement, si  $\rho_n$  satisfait à une condition de cette forme où  $0 < \alpha < 1$  (limites exclues), la fonction  $f(x)$  admet une dérivée d'ordre  $p$  qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre  $\alpha$ .*

A vrai dire, ce théorème est énoncé ici pour la première fois sous cette forme stricte, et nous en publierons ailleurs la démonstration, mais il est dû, dans sa grande partie, à M. Bernstein. Ainsi que M. Bernstein l'a déjà remarqué, l'exclusion du cas limite  $\alpha = 1$  est essentielle et ne tient pas à une imperfection de l'énoncé.

Si toutes les dérivées existent, le théorème perd de la pré-

cision qui en fait le principal intérêt. Il prouve que l'approximation décroît plus vite que toute puissance négative de  $n$ , mais il n'en fixe plus l'ordre. Il y a donc lieu de faire alors de nouvelles hypothèses sur la nature de la fonction. La première qui se présente à l'esprit est celle d'*analyticité*.

### 7. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés analytiques.

Lorsque la fonction  $f(x)$  est analytique et holomorphe sur l'axe réel et qu'il s'agit de sa représentation approchée sur cet axe seulement, l'ordre de la meilleure approximation est liée aux propriétés analytiques de la fonction et dépend avant tout de la situation de ses points critiques s'il en existe. C'est encore M. Bernstein qui a étudié le premier cette dépendance dans son Mémoire couronné par l'Académie de Belgique (1912). Mais il est revenu sur la question et il a publié des résultats isolés, mais d'une singulière précision et du plus grand intérêt, dans un second Mémoire présenté, peu après, à la même Académie (1913) (16).

M. Bernstein s'est occupé de l'approximation par polynômes. Mais ses résultats prennent une forme plus simple si on les traduit dans le mode de représentation trigonométrique, par la substitution habituelle  $x = \cos u$ . Les parallèles à l'axe réel du plan  $u$  jouent un rôle prépondérant dans l'approximation trigonométrique; il y a lieu d'observer que la substitution  $x = \cos u$  leur fait correspondre des ellipses homofocales, de foyers  $\pm 1$ , dans le plan  $x$ . Ce sont ces ellipses qui jouent le rôle prépondérant dans l'approximation par polynômes et, par suite, dans les énoncés de M. Bernstein. Mais nous n'en parlerons pas; il nous suffira d'énoncer les résultats essentiels de la théorie dans la seule hypothèse de la représentation trigonométrique.

Soit donc à étudier la meilleure approximation trigonométrique de la fonction  $\varphi(u)$  de période  $2\pi$  sur l'axe réel. Cette fonction est analytique et holomorphe sur cet axe. Supposons d'abord qu'elle admette un ou plusieurs points critiques

imaginaires. Alors, en première analyse, la meilleure approximation dépend de la distance de l'axe réel au point critique le plus rapproché.

On peut, en effet, formuler le théorème suivant, dont la première partie est due à M. Bernstein, mais que je complète par l'énoncé d'une seconde partie dont la démonstration n'a pas encore été publiée.

*Si une fonction  $\varphi(u)$  de période  $2\pi$  est holomorphe sur l'axe réel et possède son point critique le plus rapproché de cet axe sur l'une des deux droites  $y = \pm b$  ( $b > 0$ ), on suppose  $u = x + yi$ , alors, quelque petit que soit  $\varepsilon$  positif, la meilleure approximation trigonométrique,  $\rho_n$ , de  $\varphi(u)$  sur l'axe réel vérifiera constamment l'inégalité*

$$\rho_n < e^{-n(b-\varepsilon)},$$

*à partir d'une valeur suffisamment grande de  $n$ , tandis qu'elle ne vérifiera jamais définitivement l'inégalité*

$$\rho_n < e^{-n(b+\varepsilon)}$$

*quelque grand que soit  $n$ .*

La connaissance de l'ordre de la meilleure approximation se précise davantage si l'on suppose que  $\varphi(u)$  n'ait d'autres points critiques que des pôles sur les deux droites  $y = \pm b$  du théorème précédent. Je suis, en effet, en mesure de démontrer le théorème suivant, mais qui, je le pense, pourrait être beaucoup précisé :

*Si la fonction  $\varphi(u)$  de  $u = x + yi$  a ses points critiques les plus rapprochés de l'axe réel sur les droites  $y = \pm b$  ( $b > 0$ ) et que le point critique de l'ordre le plus élevé parmi ceux-ci soit un pôle d'ordre  $k$ , alors on aura constamment, à partir d'une valeur suffisamment grande de  $n$*

$$\rho_n < n^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon} e^{-nb}$$

*tandis que l'on n'a jamais définitivement*

$$\rho_n < n^{k-1-\varepsilon} e^{-nb}.$$

Mais en particularisant beaucoup plus la nature du point critique, on peut aller beaucoup plus loin et déterminer la valeur asymptotique même de  $\rho_n$ . C'est ce qui a été fait par M. Bernstein dans son dernier Mémoire de 1913 et le point de départ de cet habile mathématicien se trouve encore une fois dans les travaux de Tchebycheff.

En effet, en utilisant une formule de l'illustre mathématicien russe, M. Bernstein a réussi à former le polynôme d'approximation d'ordre  $n$  de

$$\frac{1}{x - a}$$

dans l'intervalle  $(-1, +1)$ ,  $a$  étant réel et  $> 1$ .

Par conséquent, il a obtenu en même temps la valeur exacte de l'approximation minimum. C'est là un résultat extrêmement important malgré son caractère particulier. Mais nous allons traduire ce résultat dans le mode de représentation trigonométrique, pour le rapprocher des précédents. On va voir qu'il prend alors une forme singulièrement instructive, bien plus simple et plus élégante que sous la forme considérée par M. Bernstein.

Par la transformation de Bernstein et en posant  $a = \text{Ch } b$  ou  $b$  est réel et positif, la fraction  $1 : (x - a)$  se transforme, à un facteur constant près, dans l'expression trigonométrique

$$\frac{\text{Sh } b}{\cos u - \text{Ch } b}$$

qui, aux multiples près de la période, n'a qu'un seul pôle  $u = bi$  sur chacune des droites  $y = \pm b$ , pôle dont le résidu a pour module l'unité. La meilleure approximation trigonométrique de cette fonction sur l'axe réel se réduit alors à la valeur, exacte et toute simple,

$$\rho_n = e^{-nb} :$$

Plus généralement, soit  $\varphi(u)$  une fonction paire et de période  $2\pi$ . Supposons que ses points critiques les plus voisins de l'axe réel soient sur les droites  $y = \pm b$ . Admettons encore qu'aux multiples près de la période, ces points cri-

tiques se réduisent sur chacune de ces droites, au seul pôle simple  $u = \pm bi$ , avec un résidu de module  $\alpha$ . Alors, par comparaison avec le résultat précédent, on obtient immédiatement la *valeur asymptotique* de la meilleure approximation trigonométrique de  $\varphi(u)$ . Ce sera nécessairement

$$\rho_n \sim \alpha e^{-bn}.$$

Si au lieu de cela, le pôle était d'ordre  $k$ , les autres conditions restant les mêmes, on aurait la formule asymptotique

$$\rho_n \sim \mu n^{k-1} e^{-nb},$$

où  $\mu$  est une constante qui ne dépend que de la fonction.

Voilà assurément des indications bien précieuses sur la manière dont il faut essayer de préciser les résultats plus vagues obtenus tout à l'heure dans des hypothèses plus générales.

Pour terminer, je dirai encore un mot du cas où la fonction à représenter est holomorphe dans tout le plan. Ce cas ne paraît pas avoir été étudié jusqu'ici. Mais, dans cette nouvelle hypothèse, la question de la meilleure approximation présente une analogie plus étroite avec celle de la convergence de la formule de Taylor. C'est le mode de croissance de la fonction qui devient le facteur principal dont dépend la meilleure approximation. Je vais me borner encore à la représentation trigonométrique. Les conclusions principales auxquelles je suis parvenu peuvent alors se formuler dans le théorème suivant :

*Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe de  $z = x + yi$  et de période  $2\pi$ . Soit ensuite  $\varphi(y)$  la plus petite fonction non décroissante de  $y$  positif qui satisfait, quel que soit  $y$ , à la condition*

$$|f(x \pm yi)| \leq e^{y\varphi(y)};$$

*soit  $\psi(n)$  la fonction inverse de  $\varphi$ , c'est-à-dire la plus petite solution de  $\varphi(y) = n$ . Alors, quelque petit que soit  $\varepsilon$  positif, la meilleure approximation trigonométrique de  $f(x)$  sur l'axe réel satisfait à la condition*

$$\rho_n < e^{-(1-\varepsilon)n\psi(n^{1-\varepsilon})}$$



à partir d'une valeur suffisamment grande de  $n$ , tandis qu'elle ne satisfait jamais définitivement à la condition

$$\rho_n < e^{-(1+\varepsilon)n\psi(n)}.$$

Dans cette trop longue analyse, je n'ai fait qu'effleurer les sujets que j'ai traités, j'en ai passé beaucoup d'autres sous silence. Je n'ai rien voulu de plus que ramener l'attention sur une question que les événements actuels ont fait oublier, mais qui paraissait pleine de promesses. Elle ouvre encore de nombreuses voies qui ne paraissent pas trop difficiles à explorer. Je souhaite que de jeunes mathématiciens s'y engagent et y fassent une ample moisson de découvertes.

#### INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (*articles cités*).

1. WEIERSTRASS. *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*. Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. 1885. p. 633-639, 789-805. *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente*. Werke, Bd. III (1903), p. 1-37.

RUNGE a démontré le premier théorème presque en même temps que Weierstrass. *Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen*. Acta Mathematica, t. VII, 1885, p. 387-392; *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*. Acta Mathematica, t. VI, 1885, p. 229-244.

2. VOLTERRA. *Sul principio di Dirichlet*. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XI.

3. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier*. Bull. de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences), n° 3 (mars) 1908.

4. LANDAU. *Ueber die Approximation einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function*. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXV, 1908.

5. H. LEBESGUE. *Sur l'approximation des fonctions*. Bulletin des sciences math. 2<sup>me</sup> série, t. XXII; novembre 1898.

6. S. BERNSTEIN. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné*. Mémoires publiés par la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. Collection in-4°, 2<sup>me</sup> série, t. IV, 1912. Ce Mémoire présenté

en réponse à une question de concours posée par la classe, sur ma proposition, en 1910, a été couronné dans la séance du 15 décembre 1911.

7. TCHEBYCHEFF. *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*. Mémoires de l'Acad. impériale des sciences de St-Pétersbourg, sciences math. et phys. sér. 6, t. VII, 1859. Œuvres, t. I.

8. DUNHAM JACKSON. *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Functionen durch ganze rationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Inaugural-Dissertation. Göttingen, 1911. Ce mémoire a été couronné par la Faculté des sciences de Göttingue, à laquelle il était présenté en réponse à une question de concours. La Faculté demandait, en particulier, de trouver la meilleure approximation d'une ligne polygonale, question que j'avais formulée dans le Mémoire (12) ci-dessous. (Note de la p. 403).

9. PAINLEVÉ. Comptes rendus de l'Ac. des sciences de Paris, 7 fév. 1898.

10. H. LEBESGUE. *Sur la représentation approchée des fonctions*. Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. XXVII, 1908, p. 325-328.

11. H. LEBESGUE. *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*. Bull. de la Soc. Math. de France, t. XXXVIII, 1910.

12. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes*. Bulletins de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 4 (avril), 1908. Le Mémoire se termine par une *Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée*.

13. E. BOREL. *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*. Paris, 1905.

14. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle*. Bull. de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 12 (décembre), 1910.

15. H. LEBESGUE. *Sur les intégrales singulières*. Annales de la Faculté de Toulouse, sér. 3, t. I, 1910.

16. S. BERNSTEIN. *Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données*. Bull. de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 2 (février), 1913. — Cf. Comptes rendus, 26 nov. 1912.

---