SUR LA « VARIÉTÉ MOYENNE » DE DEUX VARIÉTÉS CONVEXES

Autor(en): **Tiercy, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18029

SUR LA « VARIÉTÉ MOYENNE » DE DEUX VARIÉTÉS CONVEXES

PAR

Georges Tiercy (Genève).

§ 1.

On connaît la définition de « corps moyen » de deux corps convexes donnés : soient C_1 et C_2 ces corps donnés ; on joint un point A_1 de C_1 à un point A_2 de C_2 ; on prend le point milieu M du segment $(A_1 A_2)$; le lieu des points M est le corps moyen de C_1 et C_2.

Les propriétés de ces « corps moyens » peuvent être établies analytiquement ; il suffirait pour cela d'utiliser la « théorie des corps convexes » de Minkowski [1].

Les démonstrations deviennent extrêmement simples, si l'on procède par voie géométrique. Je me suis d'ailleurs placé d'emblée dans l'espace à n dimensions ; en cours de route, nous examinerons des cas de l'espace ordinaire. Comme cas particulier, nous envisagerons celui où toutes les droites servant à la construction de la variété moyenne ont une direction constante.

§ 2.

Soient donc deux variétés convexes, C_1 et C_2 ; la variété moyenne, que nous désignerons par (C), est aussi une variété convexe. Soit n le nombre des dimensions de ces variétés.

[1] Minkowski. *Gesammelte Abhandlungen*, II, p. 131-260.

Pour construire la variété moyenne, procédons de la manière suivante :

Situons l'espace à n dimensions dans l'espace immédiatement supérieur à $(n+1)$ dimensions ; concevons que la variété C_1 soit située dans le $(n$ — plan) défini par l'équation :

$$x_{n+1} = 0 \ ,$$

tandis que la variété C_2 serait située dans le $(n$ — plan) défini par l'équation :

$$x_{n+1} = 2\alpha \ .$$

Considérons alors la plus petite variété convexe contenant les deux variétés proposées ; et coupons cette variété à $(n+1)$ dimensions par le $(n$ — plan) défini par l'expression :

$$x_{n+1} = \alpha \ .$$

L'intersection donne une variété à n dimensions ; c'est la « variété moyenne » de C_1 et C_2.

Prenons d'abord quelques exemples.

a) PREMIER EXEMPLE. Soit le cas de $(n = 1)$; les deux variétés données sont donc deux segments de droite, portés sur une droite indéfinie représentant l'espace à une dimension. Situons cette droite dans un plan, l'axe auxiliaire étant perpendiculaire à la droite ; la variété C_1 sera portée par l'axe des x lui-même, tandis que la variété C_2 sera située sur la droite définie par :

$$y = 2 \ . \qquad \text{(avec } \alpha = 1)$$

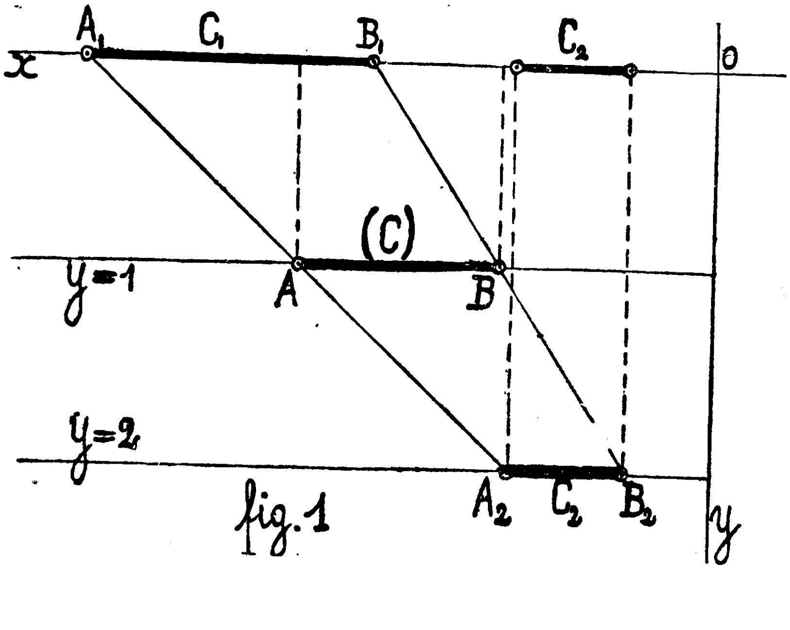


fig. 1

La plus petite variété convexe à $(n+1)$ dimensions contenant les segments C_1 et C_2 est le trapèze $(A_1 B_1 B_2 A_2)$. Coupons ce trapèze par la droite :

$$y = 1 \ ;$$

on obtient le segment (AB); c'est la variété moyenne des deux segments proposés. Il n'y a plus qu'à revenir à l'espace à une dimension, par une simple translation du segment (AB) parallèlement à l'axe des y.

On aurait obtenu le même résultat en suivant la définition initiale : prendre le milieu de toute droite unissant un point d'une des variétés proposées à un point de l'autre variété. On constatera (fig. 2) pour ce premier exemple

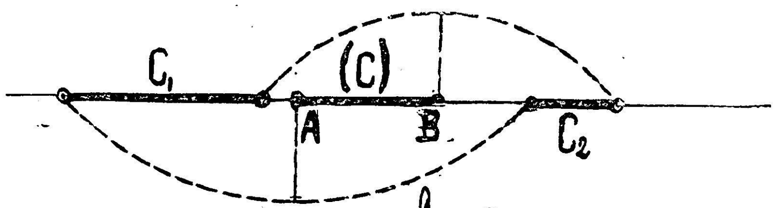


fig. 2

que les points extrêmes A et B sont les milieux des droites joignant, dans l'espace donné, les points extrêmes des variétés C_1 et C_2 ; et cela d'une seule manière.

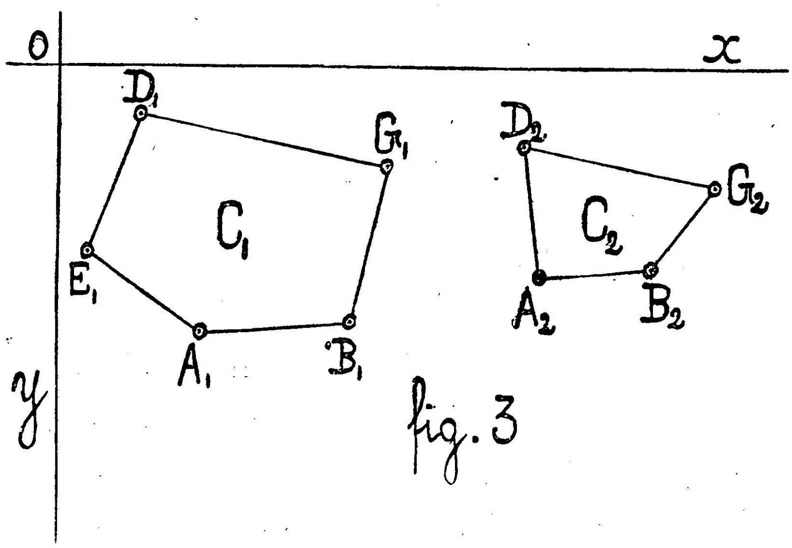


fig. 3

En outre, remarquons que la valeur du segment (C) est égale à la moyenne arithmétique des valeurs des segments C_1 et C_2.

b) Autre exemple. Prenons le cas de $(n = 2)$; et considérons deux polygones plans, chacun ayant une orientation bien déterminée par rapport aux axes de référence.

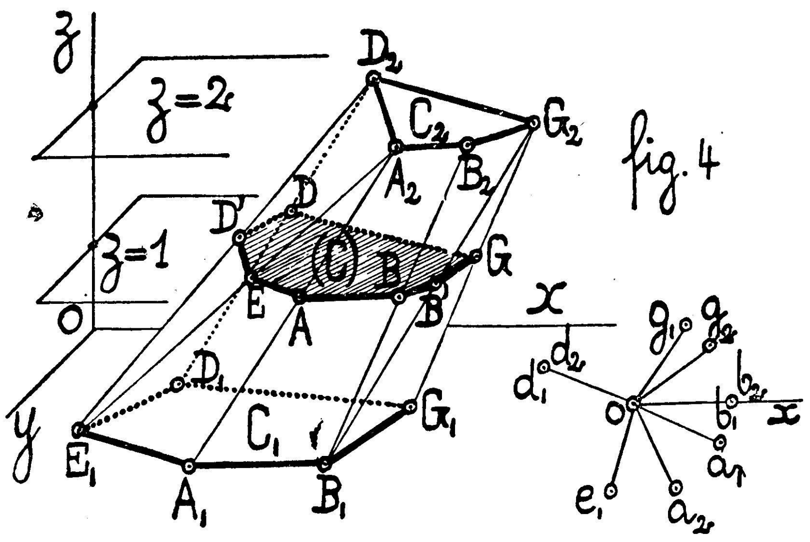
Plaçons cet espace à deux dimensions dans l'espace à trois dimensions; l'axe auxiliaire étant perpendiculaire au plan des polygones donnés; la variété C_1 restera dans le plan :

$$z = 0 \ ;$$

la variété C_2 sera située dans le plan :

$$z = 2 \ ;$$

mais elle gardera son orientation par rapport aux axes des x et des y.



Le plus petit volume convexe limité par les bases C_1 et C_2 est un prismatoïde; ses faces latérales sont des trapèzes ou des triangles; on aura un trapèze lorsque les polygones C_1 et C_2 présenteront deux côtés parallèles; par exemple, les côtés $(A_1 B_1)$ et $(A_2 B_2)$ fournissent un trapèze, de même que les côtés $(D_1 G_1)$ et $(D_2 G_2)$; quant aux triangles, on les obtiendra en étudiant l'orientation des différents côtés des variétés proposées par rapport à l'un des axes de référence; on prendra successivement comme bases des triangles latéraux, les côtés indiqués par la « rose d'orientation » (fig. 4); on comprend ici l'importance de la conservation de l'orientation respective des variétés C_1 et C_2.

Coupons ce prismatoïde par le plan :

$$z = 1 ;$$

on obtient un polygone (ABB'GDD'E); c'est la variété moyenne des deux variétés proposées.

On revient alors à l'espace à deux dimensions par une translation du polygone obtenu parallèlement à l'axe des z. La construction est facile ; il suffit de la faire en perspective cavalière exacte.

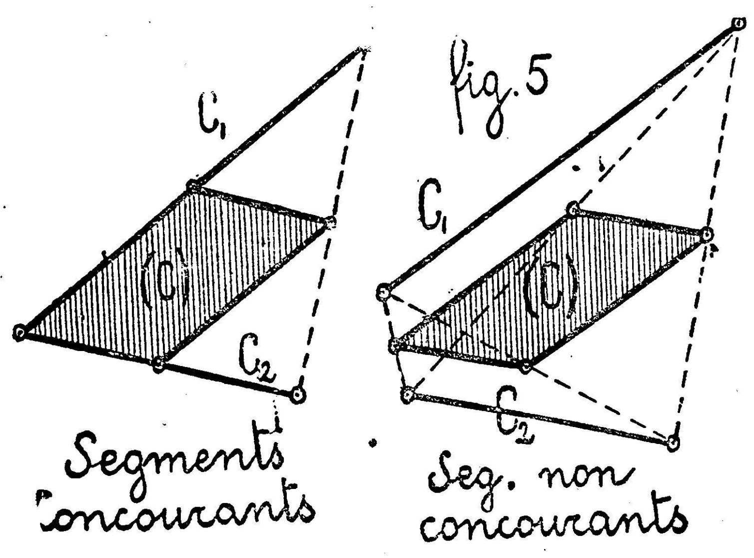
En opérant directement sur la figure (3) à deux dimensions, d'après la définition initiale (qui consiste à prendre le milieu de toute droite unissant un point de C_1 à un point de C_2, dans l'espace où ces figures sont placées), le lecteur obtiendra le même résultat ; c'est évident, car cela revient à ne considérer que la projection orthogonale de la figure (4) sur le plan xy.

On voit immédiatement que : 1° les points extrêmes de la variété solution, ou sommets, sont les milieux de droites joignant des points extrêmes des figures données ; il ne saurait en être autrement ;

2° la longueur du pourtour du polygone (C) est la moyenne arithmétique des longueurs des pourtours de C_1 et C_2.

c) REMARQUE I. Comme cas particulier de ce deuxième exemple, considérons celui où les polygones C_1 et C_2 se réduisent à deux segments rectilignes, concourants ou non. La variété moyenne est alors un parallélogramme, dont l'un des angles est égal à l'angle formé par les directions de C_1 et C_2.

On a les dessins suivants dans l'espace E_2 :



Si l'on utilise l'espace à trois dimensions, la variété moyenne cherchée sera l'intersection, par le plan $(z = 1)$, d'un tétraèdre, dont l'arête C_1 sera dans le plan primitif $(z = 0)$ et dont l'arête C_2 sera dans le plan $(z = 2)$; on sait que cette section est un parallélogramme, dont les côtés ont pour valeurs respectives $\left(\frac{C_1}{2}\right)$ et $\left(\frac{C_2}{2}\right)$.

Remarque II. Ce qui précède s'étend immédiatement au cas où les variétés C_1 et C_2 sont des surfaces planes convexes quelconques. La variété moyenne sera une surface plane convexe; et le pourtour de cette variété aura pour valeur la moyenne arithmétique des longueurs des pourtours de C_1 et C_2.

Revenons au cas général de deux variétés convexes C_1 et C_2 à n dimensions. La représentation graphique n'est plus possible; peu importe; le processus géométrique indiqué permet d'établir les propriétés fondamentales de la variété moyenne.

On a donc situé les variétés C_1 et C_2 dans l'espace immédiatement supérieur, à $(n + 1)$ dimensions: la variété C_1 dans le $(n$ — plan) défini par:

$$x_{n+1} = 0 \ ,$$

et la variété C_2 dans le $(n$ — plan)

$$x_{n+1} = 2\alpha \ ,$$

en conservant leur orientation respective. On a alors considéré la plus petite variété convexe à $(n + 1)$ dimensions contenant C_1 et C_2; et l'on a coupé cette variété par le $(n$ — plan)

$$x_{n+1} = \alpha \ .$$

L'intersection donne la variété moyenne cherchée, variété convexe à n dimensions.

On établit alors aisément les remarques suivantes:

a) A tout couple de points, A_1 de C_1 et A_2 de C_2, correspond un point de la variété moyenne (C). Si les deux points A_1 et A_2 sont des points intérieurs de C_1 et C_2, le point milieu A de (A_1A_2) est un point intérieur de la variété (C).

Inversement, à chaque point intérieur A de (C) correspond au moins un couple de points, A_1 de C_1 et A_2 de C_2.

b) Supposons que A_1 soit un point intérieur de C_1, et que A_2 soit un point frontière de C_2; le point A ne saurait alors être qu'un point intérieur de (C). En effet, imaginons, tracée autour du point A_1, une petite (n — variété) convexe V entièrement comprise dans l'intérieur de C_1; et considérons, dans l'espace à $(n+1)$ dimensions, un cône de sommet A_2 et dont la base serait cette variété V. L'intersection de ce $[(n+1)$ — cône$]$ par le (n — plan)

$$z = \alpha$$

appartient tout entière à la variété (C), et contient le point A dans son intérieur.

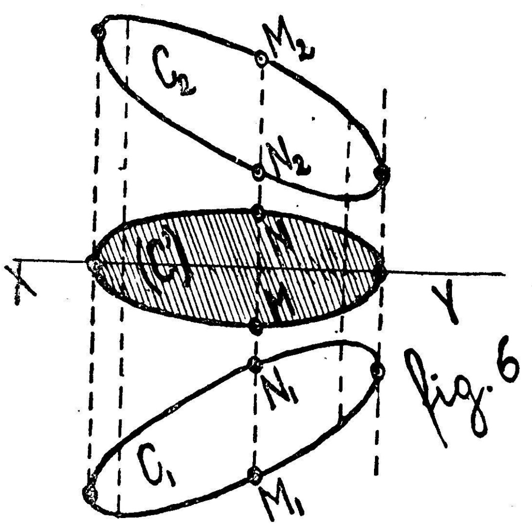
c) Chaque point F de la frontière de la variété (C) correspond au moins à un couple de points F_1 et F_2 des variétés C_1 et C_2, F_1 étant sur la frontière de C_1 et F_2 sur la frontière de C_2. En effet, d'après la remarque *b)*, aucun des points F_1 et F_2 ne saurait être un point intérieur.

d) Si un point E de (C) est un point extrême de la variété moyenne, les points E_1 et E_2, qui lui correspondent, sont, non seulement des points « frontière », mais encore des points extrêmes de C_1 et C_2; en outre, au point E ne correspond qu'un seul couple de points E_1 et E_2. Cette remarque résulte immédiatement de la définition des « points extrêmes ».

Corollaire. Si l'on relie un point frontière F_1 quelconque de C_1 à un point frontière F_2 quelconque de C_2, le point milieu de la droite (F_1F_2) n'est pas forcément sur la frontière de (C). Par exemple, dans le cas de $(n = 2)$, si l'on prend un point de C_1 situé sur (E_1A_1) et un point de C_2 situé sur (B_2G_2), le milieu de la droite qui joint ces deux points est à l'intérieur du polygone (C). (Voir fig. 3 et 4.)

§ 3.

Considérations relatives au cas de ($n = 2$) et au cas de ($n = 3$). Considérons deux courbes convexes, planes, orthogonalement *symétriques* l'une de l'autre par rapport à un axe (XY); traçons toutes les cordes ($M_1N_1N_2M_2$) perpendiculaires à l'axe (XY); et marquons (fig. 6) les points milieux M et N des segments (M_1N_2) et (N_1M_2). On construit ainsi une courbe (C′) convexe, qu'on peut appeler: *courbe moyenne de* C_1 *et* C_2 *relative à la direction* (XY).



Cette courbe (C′) n'est pas identique à la courbe moyenne générale (C), définie précédemment; son pourtour est plus petit que celui de (C), et elle est entièrement située à l'intérieur de (C); nous démontrerons ce détail dans la remarque I.

D'autre part, d'après ce que nous avons établi, la courbe (C) a le même pourtour que chacune des courbes symétriques C_1 et C_2; en effet, le pourtour de (C) est égal à la moyenne arithmétique des pourtours de C_1 et C_2, et ces deux derniers ont la même longueur.

Si donc on appelle p la valeur du pourtour de chacune des courbes données, $\mathfrak{P}$ le pourtour de la courbe moyenne (C′) relative à la direction (XY), et P le pourtour de la courbe moyenne générale (C), on a les relations :

$$\mathfrak{P} \leq \mathrm{P} \; ; \qquad \mathrm{P} = p \; ; \qquad \mathfrak{P} \leq p \; .$$

On a donc établi que le périmètre de la courbe (C′) est plus petit que celui des courbes proposées, ou lui est au plus égal.

Or, remarquons que la courbe (C′) n'est pas autre chose que la « transformée de Steiner de la courbe C_1 relativement à une direction perpendiculaire sur (XY) [1] » ; on l'obtient en portant sur toutes les cordes (M_1N_1) prolongées, de part et d'autre de l'axe (XY), la moitié de la longueur (M_1N_1). On démontre ainsi que la « transformée de Steiner relative à la direction (M_1N_1) » a en général un pourtour plus petit que celui de la courbe primitive C_1.

Pour que le pourtour de (C′) soit égal à celui de C_1, on voit immédiatement la condition : il faudrait que la courbe C_1 ait un axe de symétrie parallèle à (XY).

Remarquons d'ailleurs que l'aire de la courbe est conservée, quelle que soit la courbe convexe C_1.

Remarque I. Nous avons dit que le pourtour de la courbe (C′) est plus petit que celui de la courbe (C), et par conséquent plus petit que celui de chacune des courbes symétriques données. Etablissons ce théorème, géométriquement et par le calcul.

Prenons la droite (XY) comme axe des x, et une des tangentes communes comme axe des y (fig. 6′).

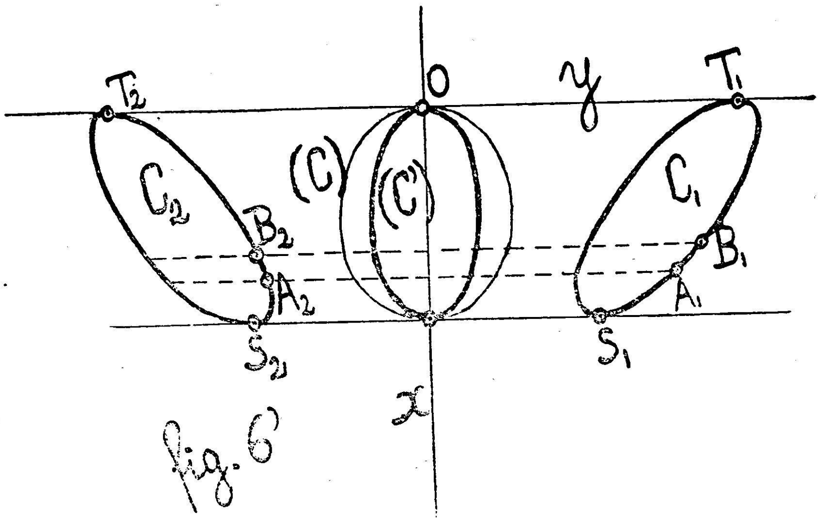


fig. 6′

Géométriquement : Cela résulte de la construction même des courbes (C) et (C′). Prenons en effet deux petits arcs cor-

[1] Steiner. *Œuvres,* II, p. 264-267.

respondants $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$ (fig. 6′). Si on les assimile à des segments de droites (fig. 6″), et qu'on cherche les variétés

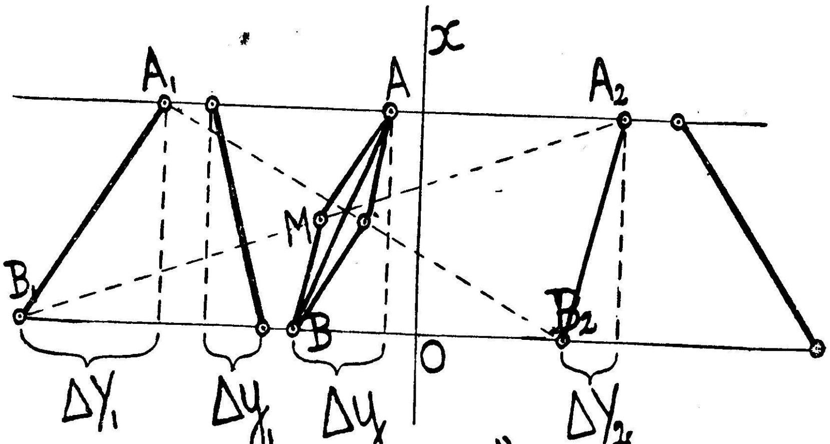


fig. 6″

(C) et (C′) déduites de ces segments, on a :

$$\overline{AB} < \overline{AM} + \overline{MB} .$$

On étend immédiatement à la courbe entière.

Par le calcul : Soient

$$y = y_1(x) \qquad \text{et} \qquad y = Y_1(x)$$

les équations des deux branches $\widehat{S_1T_1}$ de la courbe C_1, la fonction $Y_1(x)$ se rapportant à l'arc extérieur. Les équations de la courbe C_2 seront :

$$\begin{cases} y = Y_2(x) = -y_1(x) , \\ y = y_2(x) = -Y_1(x) , \end{cases}$$

$Y_2(x)$ se rapportant à l'arc intérieur $\widehat{S_2T_2}$.

On a alors, en désignant toujours par p le pourtour de C_1 et de C_2, et par P celui de la courbe moyenne générale (C) :

$$\begin{cases} P = p = \int\sqrt{1 + Y_1'^2}\,dx + \int\sqrt{1 + y_1'^2}\,dx \\ \qquad = \int\sqrt{1 + Y_1'^2}\,dx + \int\sqrt{1 + Y_2'^2}\,dx . \end{cases}$$

Quant à la courbe moyenne (C′) relative à la direction (Ox), courbe dont le pourtour est désigné par $\mathcal{P}$, il vient :

$$\Delta y = \frac{\Delta Y_1 + \Delta Y_2}{2} ; \qquad \text{(fig. 6″)}$$

$$y' = \frac{Y'_1 + Y'_2}{2} ;$$

$$\mathcal{P} = 2 \int \sqrt{1 + \left(\frac{Y'_1 + Y'_2}{2}\right)^2}\, dx .$$

On vérifie immédiatement qu'on a :

$$\mathcal{P} \leqq P .$$

Pour qu'il y ait égalité ($\mathcal{P} = P$), on voit qu'il faudrait :

$$Y'_1(x) = Y'_2(x) ,$$

c'est-à-dire :

$$Y_1(x) = Y_2(x) + K ,$$

K étant une constante. Autrement dit : les courbes C_1 et C_2 devraient présenter un axe de symétrie parallèle à (Ox). C'est également ce qu'indique le raisonnement géométrique basé sur les fig. 6′ et 6″.

Remarque II. Plus généralement, toutes les fois que deux courbes convexes C_1 et C_2 sont comprises entre deux tangentes parallèles (fig. 7), on peut considérer la courbe

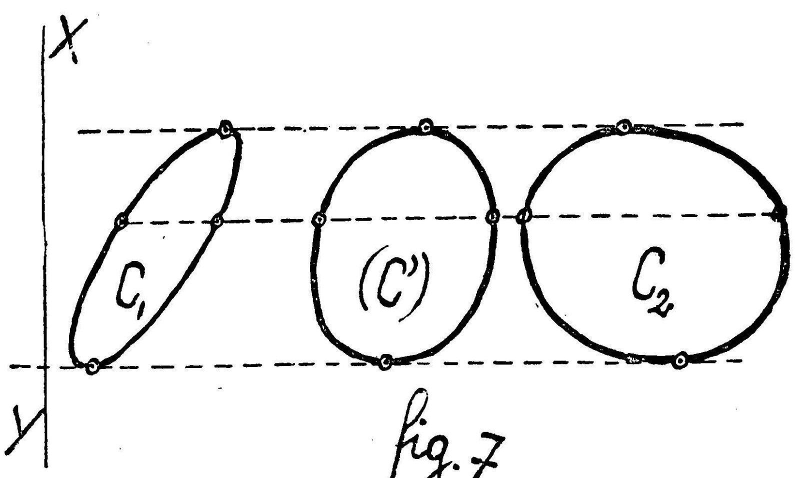


fig. 7

moyenne (C′) relative à la direction (XY) perpendiculaire à celle des tangentes.

Dans ce cas, la courbe (C′) n'a pas d'axe de symétrie orthogonale.

Application de cette remarque : Considérons le cas où les courbes C_1 et C_2 se réduisent à deux segments de droites concourants (fig. 8). Joignons les extrémités A_1 et A_2, et cherchons la variété moyenne (C′) de C_1 et C_2 relative à la direction (XY) perpendiculaire à la droite $(A_1 A_2)$. Les variétés proposées ne sont symétriques l'une de l'autre par rapport à aucun axe (symétrie orthogonale). La variété moyenne (C′) obtenue n'est alors autre chose que la médiane (OA′) du triangle $(OA_1 A_2)$.

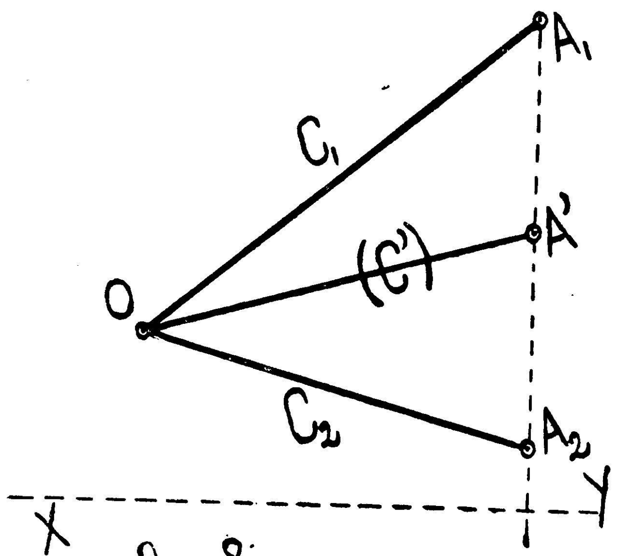


fig. 8

Considérons maintenant, dans l'espace E_3, deux corps convexes quelconques C_1 et C_2, symétriques l'un de l'autre par rapport au plan π (la fig. 6 peut encore servir; il suffit de poser que le plan π est représenté par sa trace XY sur le plan du dessin). En opérant comme dans le cas de $(n = 2)$, on construit un volume convexe (C′), qu'on peut appeler : « Corps moyen de C_1 et C_2 relativement au plan π ».

Ce corps (C′) est tout entier contenu dans le corps moyen général (C) précédemment défini ; cela résulte des définitions mêmes de (C) et (C′). D'ailleurs, on vérifie aisément que la surface de (C′) est plus petite que celle de C_1 ; soient en effet (fig. 6′) :

$$z = Z_1(x, y) , \qquad z = z_1(x, y) ,$$

les équations des deux portions $\widehat{S_1 T_1}$ de la surface de C_1, la fonction $Z_1(x, y)$ donnant la portion extérieure. Soient encore :

$$\begin{cases} z = Z_2(x, y) = -z_1(x, y) , \\ z = z_2(x, y) = -Z_1(x, y) , \end{cases}$$

les équations des deux portions $\widehat{S_2T_2}$ de la surface de C_2, la fonction $Z_2(x, y)$ se rapportant à la portion intérieure.

Désignons par s la surface de C_1 ou de C_2; et $\mathcal{S}$ celle de la variété (C'). Posons ensuite :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z_1}{\partial x} &= P_1 , \\ \frac{\partial Z_1}{\partial y} &= Q_1 ; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} &= p , \\ \frac{\partial z_1}{\partial y} &= q ; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z_2}{\partial x} &= P_2 , \\ \frac{\partial Z_2}{\partial y} &= Q_2 ; \end{aligned}\right.$$

il vient :

$$\left\{\begin{aligned} s &= \int\int\left[\sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + p^2 + q^2}\right] dx\,dy \\ &= \int\int\left[\sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}\right] dx\,dy . \end{aligned}\right.$$

Puis, pour la variété (C') :

$$z'_x = \frac{P_1 + P_2}{2} ; \qquad z'_y = \frac{Q_1 + Q_2}{2} ;$$

$$\mathcal{S} = 2\int\int\sqrt{1 + \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q_1 + Q_2}{2}\right)^2}\, dx\,dy .$$

Or, ce corps (C') n'est pas autre chose que le « transformé de Steiner de la variété C_1 relativement à une direction perpendiculaire au plan π » (voir *Œuvres* de Steiner, II, p. 302); on l'obtient en portant sur toutes les cordes (M_1N_1) prolongées, et de part et d'autre du plan π, la moitié de la longueur du segment (M_1N_1). Il en résulte que le « transformé de Steiner de la variété C_1 relativement à une direction (M_1N_1) d'ailleurs quelconque » a en général une surface plus petite que celle des variétés symétriques proposées.

Pour que la surface soit la même, il faudrait :

$$P_1 = P_2 \qquad \text{et} \qquad Q_1 = Q_2 ;$$

c'est-à-dire :

$$Z_1(x, y) = Z_2(x, y) + K ,$$

avec $K =$ constante; il faudrait donc que le corps C_1 présente un plan de symétrie parallèle au plan π; l'opération de Steiner reviendrait alors à déplacer le corps C_1 en translation, perpendiculairement à son plan de symétrie.

Remarque I. On verrait facilement que la variété (C′) a le même volume que C_1 ou C_2.

Remarque II. Pour pouvoir appliquer l'opération (C′), il n'est point nécessaire que les corps C_1 et C_2 soient symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain plan π ; il suffit qu'ils soient convexes et inscrits dans un même cylindre. Mais alors, le corps moyen (C′), relatif au plan π normal aux génératrices du cylindre, ne présente plus de plan de symétrie orthogonale.

Remarque III. On pourra de même, dans l'espace E_n à n dimensions, construire une variété (C′) correspondant aux deux variétés C_1 et C_2, lorsque ces dernières seront orthogonalement symétriques l'une de l'autre par rapport à un certain (n — plan) π.

§ 4.

Combinaison sommatoire géométrique de deux variétés C_1 et C_2 dans l'espace E_n.

Considérons la variété moyenne (C) générale de C_1 et C_2. Et construisons une variété semblable (V) avec un rapport de proportionnalité égal à 2. Cette variété (V) présente toutes les arêtes de C_1 et toutes celles de C_2, en grandeur et orientation ; de même, on y trouve toutes les faces de C_1 et celles de C_2 en vraie grandeur (il y a, en plus, d'autres faces « de liaison »).

On obtiendrait le même résultat si l'on cherchait à construire directement la plus petite variété convexe possible présentant toutes les arêtes de C_1 et toutes celles de C_2 en grandeur et en orientation, et seulement ces arêtes (elles peuvent d'ailleurs figurer plusieurs fois).

Nous pouvons appeler cette variété (V) la « somme géométrique de C_1 et C_2 ; ou plutôt, afin d'éviter toute confusion avec la terminologie employée dans la théorie des vecteurs, nous dirons : « Combinaison sommatoire géométrique » des variétés C_1 et C_2.

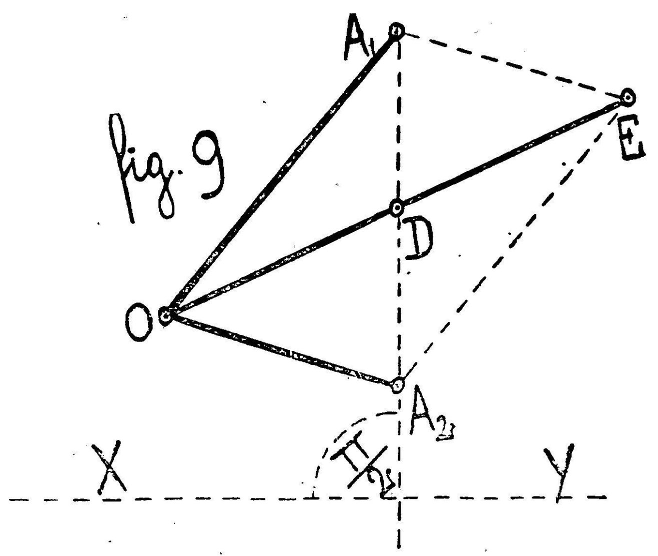
Exemple : Si on a deux sphères de rayons R_1 et R_2, la variété (V), qui leur correspond, est une sphère de rayon $(R_1 + R_2)$.

Il est évident que cette variété (V) possède, relativement aux variétés primitives C_1 et C_2, les mêmes propriétés que la variété moyenne générale (C).

On pourra construire de même une « combinaison sommatoire (V′) relative à un certain (n — plan) π » chaque fois que les variétés C_1 et C_2 seront inscrites dans un cylindre dont les génératrices seront normales à π; cette variété (V′) sera semblable à la variété (C′), le rapport de proportionnalité étant 2.

Exemple (avec $n = 2$) conduisant à la résultante de deux vecteurs :

Soient C_1 et C_2 deux segments de droites concourants (fig. 9); et construisons la variété moyenne (C′) relative à la direction (XY) ; on obtient la médiane (OD) du triangle (OA_1A_2).



Si on la double, on obtient la diagonale (OE) du parallélogramme construit sur (OA_1) et (OA_2).

D'où l'énoncé : La résultante de deux vecteurs (OA_1) et (OA_2), ou somme géométrique ordinaire de ces deux vecteurs, n'est autre chose que la « combinaison sommatoire géométrique (V′), relativement à la direction (XY), des deux segments (OA_1) et (OA_2) ».

Genève, juillet 1915.