

# CONTRIBUTION A LA CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DOUBLES D'UNE INVOLUTION HYPERBOLIQUE

Autor(en): **Redl, Fr.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18030>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# CONTRIBUTION A LA CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DOUBLES D'UNE INVOLUTION HYPERBOLIQUE

PAR

Fr. REDL (Zell s/Ybbs).

Une involution, de sommet  $S$ , est déterminée par les paires de rayons  $ST, ST'$  et  $SA, SA'$  de la fig. 1; un rayon en est représenté par  $\Sigma\Sigma'$ , de trait plus marqué. D'après une propriété connue, les six sommets d'un quadrilatère complet (dans la figure:  $TT'AA'\Sigma\Sigma'$ ) peuvent être placés sur trois paires de droites correspondantes d'une involution. Dans notre cas, deux sommets viennent sur le rayon double  $\Sigma\Sigma'$ .

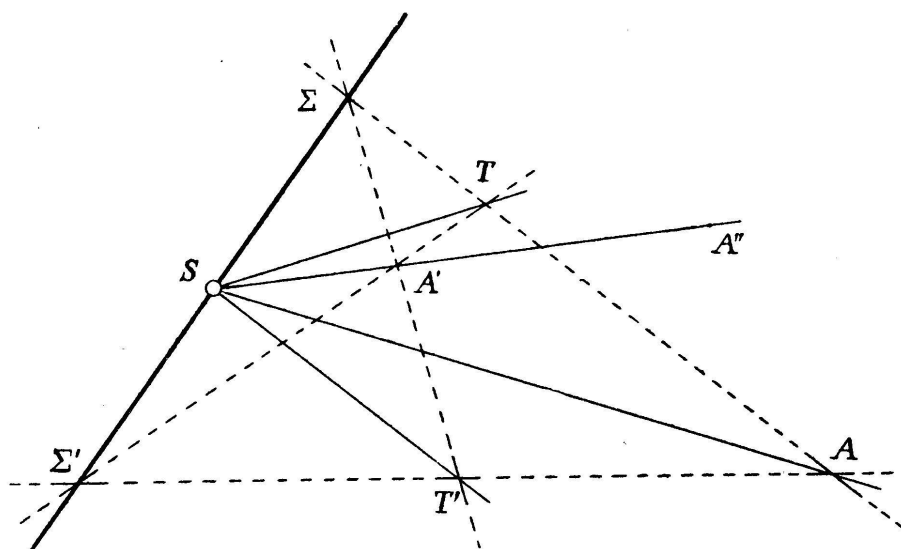


Fig. 1.

La conique qui touche  $ST$  en  $T = (1.2)$ ;  $ST'$  en  $T' = (4.5)$  et qui passe par  $A = 3$  contient aussi  $A' = 6$ , car  $\Sigma\Sigma'$  est la droite de Pascal de l'hexagone numéroté. Maintenons  $T, T'$  et  $A$  fixes, tandis que nous faisons tourner la droite de Pascal autour de  $S$ ; le point d'intersection de  $\Sigma T'$  et  $\Sigma' T$  décrit la conique en question, et vient par conséquent aussi en  $A''$ ,

seconde intersection de  $SA'$ . La droite de Pascal représente alors le second rayon double de l'involution.

Réciproquement si, au lieu d'un rayon double, on donnait la conique qui touche une paire de l'involution en  $T$  et  $T'$ , et coupe l'autre en  $A'$  et  $A''$  (respectivement  $A$  et  $A_1$ ), on trouverait les rayons doubles en construisant les points  $\Sigma(\Sigma')$  et  $\Sigma_1 = AT \times A''T'$  ( $\Sigma'_1 = AT' \times A''T$ ), le point  $A_1$  convenant au même degré que  $A$ . La fig. 2 indique la construction. La droite  $TA$  est coupée par  $T'A'$  et  $T'A''$  en  $\Sigma$ , resp.  $\Sigma_1$ ;  $S\Sigma$  et  $S\Sigma_1$  sont les rayons cherchés. Comme les points  $T$  et  $T'$  sont arbitraires, on peut admettre que la conique est un cercle.

On obtient facilement une autre construction des rayons doubles (fig. 2) avec l'aide des points  $R$  et  $R_1$  sur la polaire  $TT'$  du point  $S$ .  $R$  et  $R_1$  sont choisis conjugués suivant le

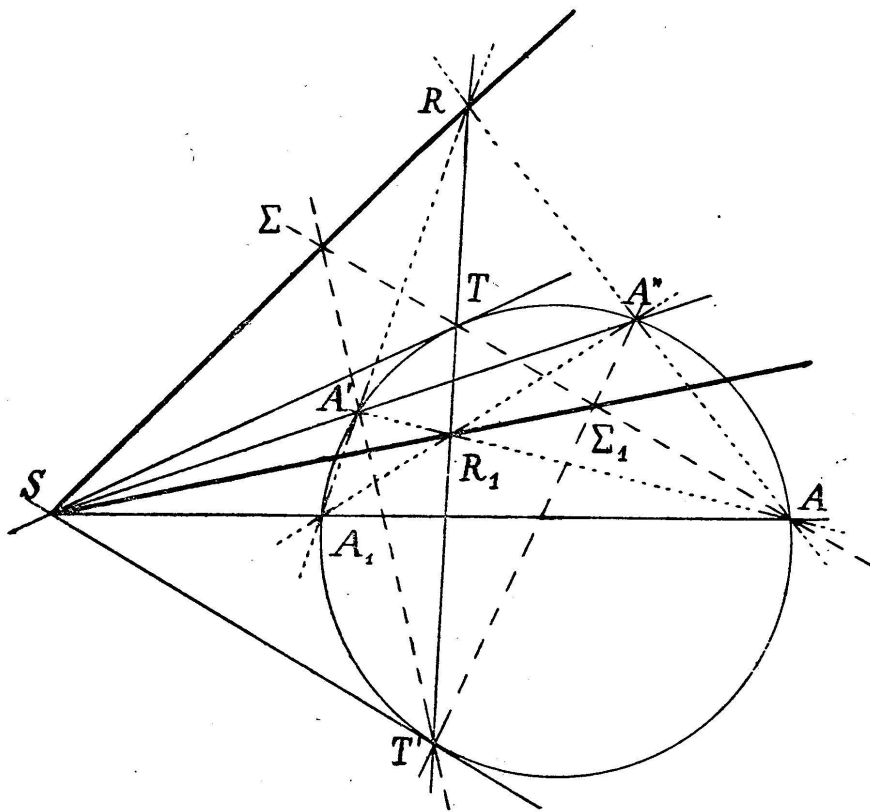


Fig. 2.

cercle, et divisent harmoniquement le segment  $TT'$ ; d'autre part comme points diagonaux du quadrilatère complet  $AA_1A'A''$ , ils sont aussi divisés harmoniquement par les côtés opposés  $SA$  et  $SA'$ , etc. Nous avons ainsi une construction des éléments doubles pour le cas où l'une des paires embrasse l'autre : par la paire extérieure ( $TT'$ ) on décrit un

cercle arbitraire, et l'on détermine le pôle (S), par rapport à ce cercle, du support de l'involution. On joint ce dernier aux points intérieurs par des droites dont les intersections avec le cercle ( $A'A''$  et  $AA_1$ ) sont à joindre entre elles, ce qui conduit aux points doubles R,  $R_1$ .

On obtiendrait finalement une troisième construction des rayons doubles en se servant (dans la fig. 2) du théorème suivant lequel deux points diagonaux du quadrilatère complet  $AA_1A'A''$  doivent toujours se trouver sur une diagonale du quadrilatère des tangentes aux points précités.

En généralisant par projection la dépendance entre les rayons doubles indiquée dans la fig. 2, on peut, selon les circonstances, l'utiliser pour construire un rayon double, lorsque l'autre est donné. Dans ce but on se sert habituellement des propriétés harmoniques du quadrilatère complet, comme d'ailleurs on s'en rend compte dans la fig. 2, en relation avec les points R et  $R_1$ . Mais comme on peut aussi arriver au point R en partant de  $\Sigma_1$ , ceci nous conduit, en combinaison avec la méthode que nous venons de rappeler, au procédé suivant. Si l'on mène par un point arbitraire du rayon double intérieur (extérieur) deux droites dont chacune coupe les quatre rayons de l'involution; si ensuite on considère comme correspondants les points d'intersection de la première droite auxiliaire, et ceux de la seconde, par les rayons conjugués de l'involution, les droites de jonction des quatre paires de points correspondants passent par un même point du rayon double extérieur (intérieur).

Inversement, si nous partons de  $R(R_1)$  pour gagner  $\Sigma_1(\Sigma)$ , nous trouvons encore une seconde solution de notre problème: Si l'on mène, par un point arbitraire du rayon double intérieur (extérieur) deux droites, dont chacune coupe une paire *différente* de rayons de l'involution, les droites de jonction des quatre points d'intersections, convenablement appariées, se coupent sur le rayon double extérieur (intérieur).

Pour compléter la fig. 2, nous ajoutons la remarque suivante: Si la tangente  $A'(A'')$  coupe la droite  $AA_1$  en  $P(P')$ , et la tangente  $A(A_1)$  la droite  $A'A''$  en  $Q(Q')$ ,  $PQ(P'Q')$  passe par  $R_1$ . De même pour le point R. Si, par exemple, les tan-

gentes  $A'$  et  $A_1$  coupent les tangentes  $T$  et  $T'$  en  $V$  et  $V'$ ,  $W$  et  $W'$ , les droites  $VW'$  et  $WV'$  passent par  $R$ .

Des constructions dualistiques à celles de la fig. 2, nous ne relevons que la seconde, et nous l'effectuons dans la fig. 3

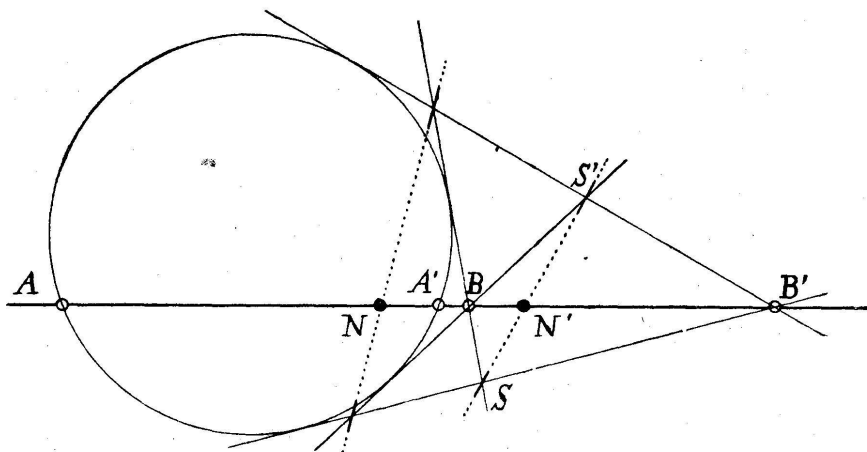


Fig. 3.

qui montre comment on trouve de façon très commode les points doubles d'une involution donnée par deux paires de points. On mène par une des paires —  $AA'$  dans la figure — un cercle quelconque et on lui mène depuis les points  $B$  et  $B'$  de la seconde paire, les quatre tangentes possibles, etc. Les points  $N$  et  $N'$  conjugués suivant le cercle, divisent harmoniquement la diagonale  $BB'$  du quadrilatère des tangentes, et sont les points cherchés.

Si deux tangentes forment un angle très obtus, leur point d'intersection qui, de plus, peut se trouver près du support, ne peut naturellement pas être employé dans une construction de quelque exactitude. Si l'un au moins des points doubles est obtenu avec sécurité, on construit l'autre en se servant des propriétés harmoniques du quadrilatère, ou du pôle du support suivant le cercle. Mais les remarques faites à propos de la fig. 2, prises dualistiquement, donnent aussi le moyen d'éviter des points d'intersection peu favorables de tangentes.  $X$  étant un point convenablement choisi de la droite  $SS'$ ,  $XA$  coupe  $BS(BS')$  en  $P(P')$ ;  $XA'$  coupe  $B'S(B'S')$  en  $Q(Q')$ .  $PQ(P'Q')$  détermine alors sur le support de l'involution le second point double  $N$ .

Traduction de M. F. GONSETH (Zurich).