Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
Autor: de la Vallée Poussin, C.
Kapitel: 1. — Le problème de l'approximation.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18019

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE[1]

PAR

C. de la Vallée Poussin

Professeur à l'Université de Louvain.

1. — Le problème de l'approximation.

L'approximation des fonctions de variables réelles a fait l'objet de recherches récentes (1898-1913). J'en ai suivi les dernières avec d'autant plus d'intérêt que j'avais contribué dans une certaine mesure à les provoquer. Je me propose de donner ici une idée sommaire de cette nouvelle théorie. J'espère qu'elle suffira pour faire saisir les problèmes les plus caractéristiques qui se posent et la nature des procédés mis en œuvre pour les résoudre. Je me guiderai dans mon exposé sur l'ordre historique des découvertes; mais je me bornerai aux fonctions d'une seule variable, faute de temps. On se gardera d'en conclure que la théorie des fonctions de plusieurs variables manque actuellement d'intérêt ou de résultats.

Je définis d'abord la question qui va nous occuper.

Il s'agit d'exprimer une fonction sous forme finie avec plus ou moins d'approximation. Mais les recherches actuelles ne portent que sur deux modes de représentation approchée : *La représentation par polynômes* et alors la représentation se fait dans un intervalle (a, b), où l'on suppose la

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918.

Les numéros dans le texte renvoient à l'index bibliographique à la fin de l'article.

fonction continue ; *la représentation trigonométrique,* auquel cas la fonction est supposée continue et périodique de période 2π, la représentation s'étend alors à toutes les valeurs réelles de x.

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n, c'est-à-dire par une suite limitée de la forme

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx ,$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynôme de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. Il y a lieu d'observer que si l'expression est paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynôme de degré n en $\cos x$.

Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et $P_n(x)$ un polynôme de degré n d'ailleurs quelconque. Ce polynôme doit être considéré comme une expression approchée de $f(x)$. Le maximum dans (a, b) de la différence absolue

$$|f(x) - P_n|$$

est *l'approximation* fournie par P_n. Ce polynôme est d'autant meilleur comme expression approchée qu'il fournit une approximation plus petite. Si l'on considérait une fonction périodique et sa représentation trigonométrique, l'approximation se définirait de la même manière.

Le *problème de l'approximation* consiste à former une expression de l'un ou de l'autre de ces deux types *dont l'approximation soit aussi petite qu'on le veut.* Le problème est possible dans les deux cas. Il y a là deux *théorèmes d'existence,* tous deux dus à Weierstrass (1885), et qui ont été le point de départ de la théorie qui nous occupe. Il y a lieu de nous y arrêter quelques instants.

2. — Les deux théorèmes d'existence de Weierstrass.

Weierstrass a démontré les deux théorèmes suivants (1) :

I. *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b) *peut*