MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un problème de Lagrange sur la construction des cartes géographiques.

Lagrange a posé dans le Tome IV de ses Œuvres complètes le problème suivant, qu'il a rencontré à propos de la construction des cartes géographiques :

Etant donné trois points R, R′, R″, déterminer deux points A et B tels que les rapports $\frac{RA}{RB}$, $\frac{R'A}{R'B}$, $\frac{R''A}{R''B}$ soient entre eux dans des rapports donnés, et que les différences des angles ARB, AR′B, AR″B soient également données.

Dans l'*Enseignement Mathématique* du 15 janvier 1914, nous avons donné un procédé approximatif pour résoudre ce problème, qui avait l'avantage d'indiquer une méthode assez générale pour trouver la solution de différents problèmes de géométrie plane, et qui consistait en principe à remplacer le problème proposé par un problème de géométrie dans l'espace plus simple.

Au contraire, la solution suivante est rigoureuse et non approximative. Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la première solution, il suffit de construire une figure semblable à la proposée ; on peut donc se donner arbitrairement AB en grandeur et en position et chercher à construire le triangle RR′R″ à la condition qu'il soit semblable au triangle formé par les trois points donnés R, R′, R″. Le problème se présente alors sous la forme suivante :

Considérons le faisceau des cercles C qui passent par les points A et B ; si l'un d'eux est considéré comme lieu du point R, le lieu du point R′ sera un autre cercle tel que l'angle de ces deux cercles soit égal à la différence $\widehat{ARC} - \widehat{AR'B}$; de même le lieu de R″ sera un troisième cercle de ce faisceau. Considérons d'autre part le faisceau de cercles C′, orthogonal au premier, constitué par les cercles lieux des points dont le rapport des distances aux points A et B est constant, si l'un d'eux est considéré comme lieu du point R, le lieu du point R′ sera un autre cercle du faisceau et de même pour R″, ces deux derniers cercles étant déterminés dès que le premier est donné.

Les intersections de ces trois couples de cercles deux à deux fournissent un triangle RR′R″, mais il faut que ce triangle RR′R″ soit semblable à un triangle donné. Comment s'arranger pour arriver à remplir cette dernière condition. Transformons la figure par inversion, le pôle d'inversion étant le point A et la puissance d'inversion étant $\overline{AB}^2$.

Le faisceau de cercles C va se transformer en un faisceau de droites C_1 passant par B. L'ensemble des trois cercles de ce faisceau dont nous avons parlé se transformera en un ensemble de trois droites C_1 passant par B et faisant entre elles des angles donnés.

D'autre part, le faisceau des cercles C′ va se transformer en un faisceau de cercles concentriques C'_1 ayant pour centre le point B.

Comme un calcul simple le montre aisément, le cercle lieu des points pour lesquels $\frac{RA}{RB} = \lambda$ se transformera en un cercle de rayon $\varrho = \frac{AB}{\lambda}$; ceci nous montre immédiatement que l'ensemble des trois cercles de ce faisceau se transforme en un ensemble de trois cercles concentriques dont les rapports des rayons sont donnés. Il en résulte immédiatement que le triangle $R_1R'_1R''_1$ dont les sommets sont les inverses des points R, R′, R″ et toujours semblable à lui-même, indépendamment de l'orientation du faisceau des droites C_1; nous pouvons donc nous donner arbitrairement l'ensemble de trois droites C_1, ainsi que l'ensemble de trois cercles C_2. Nous avons ainsi un certain triangle $r_1r'_1r''_1$ par l'intersection des droites et cercles correspondants de ces deux ensembles. Il faut maintenant déterminer le centre d'inversion a tel que l'inverse par rapport à ce centre du triangle $r_1r'_1r''_1$ soit semblable au triangle RR′R″.

Si les longueurs des côtés du triangle RR′R″ sont représentées par α, β, γ, il faut que l'on ait (d'après la formule qui donne la longueur du segment limité par les inverses de deux points donnés)

$$\frac{\dfrac{r_1r'_1}{ar_1 . ar'_1}}{\alpha} = \frac{\dfrac{r'_1r''_1}{ar'_1 . ar''_1}}{\beta} = \frac{\dfrac{r''_1r_1}{ar''_1 . ar_1}}{\gamma} .$$

Ces égalités montrent immédiatement que les rapports

$$\frac{ar_1}{ar'_1}, \quad \frac{ar'_1}{ar''_1}, \quad \frac{ar''_1}{ar_1}$$

sont connus, et égaux à

$$\frac{\beta . r''_1 r_1}{\gamma . r'_1 r''_1}, \quad \frac{\gamma . r_1 r'_1}{\alpha . r''_1 r_1}, \quad \frac{\alpha . r'_1 r''_1}{\beta . r_1 r'_1},$$

Donc le point a se détermine par l'intersection des cercles lieux des points dont le rapport des distances à r_1, r'_1, r''_1 est connu. Mais si l'on connaît un de ces points a, relatif à un certain ensemble de trois cercles C_2, tous les autres points a, relatifs à tous les ensembles de trois cercles C_2 seront sur la droite Ba par raison d'homothétie. Il suffit donc de porter sur cette droite un segment, égal à BA, pour obtenir le point A_1, ce qui détermine en définitive l'orientation du faisceau des trois droites C_1 par rapport à BA, c'est-à-dire justement la quantité que nous nous étions donnée arbitrairement.

Le problème est donc résolu.

L. Ballif (Lorient).

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés.

Dans sa séance annuelle du 2 décembre 1918, après un éloquent discours du Président M. Paul Painlevé, l'Académie a décerné les prix proposés pour 1918. Nous avons déjà mentionné les prix attribués à Sir Joseph Larmor, à MM. Paul Montel, A. Belopšlkij, Fr. Sy et au père Stanislas Chevalier. Parmi les prix concernant les sciences mathématiques, le palmarès publié dans les Comptes Rendus du 2 décembre 1918 contient en outre les noms suivants :

Mathématiques. *Prix fondé par l'Etat : Grand prix des sciences mathématiques* (3000 fr.). — L'Académie avait mis au concours l'étude de l'*itération* d'une substitution en rappelant que le point de vue *local* avait été seul considéré jusqu'alors et en invitant les concurrents à se placer au point de vue *général.* Trois Mémoires ont été déposés au secrétariat. Le prix a été attribué à M. Gaston Julia, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, lieutenant d'infanterie, lauréat du prix Bordin en 1917. Une mention très honorable a été décernée à feu Samuel Lattès, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.