

# CHRONIQUE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

des dérivées dans l'enseignement secondaire; sur la notion de probabilité.

6. *Rédaction des nouveaux programmes* de mathématiques pour l'enseignement secondaire et des instructions pédagogiques pour leur application.

En terminant cette note nous exprimons l'espoir de pouvoir faire connaître bientôt une étude d'ensemble sur l'enseignement mathématique en Bolivie, qui formera une contribution de cette république sud-américaine aux travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

---

## CHRONIQUE

---

### Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

*Doctorats ès sciences mathématiques* décernés par les universités américaines pendant l'année universitaire 1920-1921. En voici la liste d'après le *Bulletin of the American Mathematical Society* :

N. M. ALDERTON (California): Involutory quartic transformations in space of four dimensions. — B. M. ARMSTRONG (Illinois): Mathematical induction in group theory. — E. M. BERRY (Iowa): Diffuse refraction. — R. BLODGETT (Radcliffe): Determination of the coefficient in interpolation formulae and a study of the approximate solution of integral equations. — P. H. DAUS (California): Normal ternary fraction expansions for the cube roots of integers. — W. E. EDINGTON (Illinois): Abstract group definitions and applications. — M. C. FOSTER (Yale): Rectilinear congruences referred to special surfaces. — Ph. FRANKLIN (Princeton): Four color Problems. — M. I. LOGSDON (Chicago): Equivalence and reduction of pairs of hermitian forms. — I. ROMAN (Chicago): Transformation of waves through a symmetrical optical instrument. — D. V. STEED (California): Lines on the hypersurface of order  $2n-3$  in space of  $n$  dimensions. — J. SUN (Syracuse): Some determinant theorems. — F. D. SUTTON (Johns Hopkins): Certain chains of theorems in reflective geometry. — E. E. WOOD (Chicago): Certain relations between the projective theory of surfaces and the projective theory of congruences.

## Société mathématique suisse.

Réunion de Bienne, 23 avril 1922.

La Société mathématique suisse a tenu une réunion de printemps à Bienne, le dimanche 23 avril 1922, sous la présidence de M. G. DUMAS, professeur à l'Université de Lausanne. Sur l'invitation du comité, MM. les professeurs W. BLASCHKE et HECKE, de l'Université de Hambourg, et M. PLANCHEREL, de l'École polytechnique fédérale de Zurich, ont présenté les conférences dont on trouvera ci-après un résumé. En outre, des communications furent présentées par MM. E. GUILLAUME, G. POLYA et D. MIRIMANOFF.

## CONFÉRENCES.

1. Conférence de M. E. HECKE (Hambourg). — *Arithmétique et Théorie des fonctions*. — Les plus grands progrès de l'arithmétique ont été effectués lorsqu'on a appliqué aux questions qui y ressortissent le moyen puissant qu'offre l'analyse des variables continues. Il suffit de se rappeler le nom du fondateur de la théorie analytique des nombres : Dirichlet, ainsi que ceux de Gauss, Abel, Kronecker, Kummer, qui firent voir l'importance de la fonction exponentielle et de la fonction elliptique modulaire pour l'arithmétique supérieure.

Une question importante se pose : *Quel secours doit-on attendre de l'analyse dans l'édification complète de la théorie des corps de nombres algébriques de degrés supérieurs, théorie que l'on doit à Kummer, Dedekind et Hilbert ? Quels problèmes de théories des fonctions ces questions arithmétiques soulèvent-elles ?*

Le conférencier esquisse les méthodes et les résultats en rapport avec ces matières.

Dans le corps quadratique réel  $K(\sqrt{3})$ , les « nombres entiers » sont les nombres  $\mu = m + n\sqrt{3}$  ( $m, n$ , étant rationnels entiers) pour lesquels il est aisé de définir la divisibilité. Les nombres les plus importants du corps sont les diviseurs du nombre 1, ce sont par suite des diviseurs de tous les nombres entiers. C'est précisément le cas du nombre  $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$  « l'unité fondamentale »  $\left(\frac{1}{\varepsilon} = 2 - \sqrt{3}\right)$  et des nombres  $\pm \varepsilon^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) que l'on désigne tous sous le nom d'« unités »; grâce à ces nombres, il est possible de décomposer chaque nombre entier  $\mu$  en un produit de facteurs entiers, par exemple  $\mu = \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\varepsilon}$ ; ces décompositions en facteurs sont peu intéressantes. Les nombres premiers dans  $K(\sqrt{3})$  sont des nombres entiers du corps qui ne peuvent être décomposés en un produit de facteurs

entiers — les facteurs unités étant exclus. On peut alors démontrer que chaque nombre entier du corps est décomposable d'une seule manière en un produit de facteurs premiers, pourvu que l'on fasse abstraction des facteurs unités.

Dirichlet a déjà reconnu la signification de la fonction :

$$\zeta_k(s) = \sum_{(\mu)}' \frac{1}{|N(\mu)|^s} \quad (N(\mu) = \mu\mu' = m^2 - 3n^2)$$

qui est, par rapport au corps  $K(\sqrt{3})$ , l'analogue de ce qu'est la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann pour le corps naturel. Dans l'expression de  $\zeta_k(s)$ , la sommation porte sur toutes les valeurs entières  $\mu \neq 0$ , du corps qui ne sont pas associées, c'est-à-dire telles que deux d'entre elles ne diffèrent pas par un facteur unité. Cette fonction de la variable  $s$ , par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier, est représentable en un produit infini :

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \frac{1}{|N(\pi)|^s}}$$

où  $\pi$  passe par tous les nombres premiers non associés. Les propriétés de la fonction analytique  $\zeta_k(s)$  jouent un grand rôle dans la recherche des nombres premiers du corps. L'un des premiers résultats relatifs à ce point est le théorème de Dirichlet, qui assure qu'il existe une infinité de nombres premiers  $\pi$ .

Considérons maintenant l'ensemble des nombres  $m + n\sqrt{3}$  comme une multiplicité à deux dimensions; les recherches récentes ont eu pour but l'étude de certaines fonctions des deux variables qu'on peut attacher au corps. Voici comment il nous paraît que le pas essentiel peut être effectué dans cette direction : Par analogie avec les recherches classiques, formons la forme quadratique définie qui correspond au corps  $K(\sqrt{3})$ , soit  $A\mu^2 + A'\mu'^2$ , où  $\mu$  et  $\mu'$  sont conjugués et  $A$  et  $A'$  positifs; puis formons pour  $s > 1$  la série convergente

$$\sum_{\mu} \frac{1}{(A\mu^2 + A'\mu'^2)^s}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de  $\mu$ , à l'exclusion de  $\mu = 0$ . En multipliant les dénominateurs par un nombre approprié  $C^s$  on peut s'arranger pour que  $AA' = 1$ ; posons alors  $A = e^x$ ,  $A' = e^{-x}$ , nous obtenons alors la fonction

$$Z(s; x) = \sum_{\mu} \frac{1}{(e^x \mu^2 + e^{-x} \mu'^2)^s}$$

des deux variables  $s$  et  $x$ . De telles fonctions de  $s$  ne sont pas inconnues en analyse, mais ce qui fait leur importance pour la théorie arithmétique du corps  $K$ , c'est leur périodicité en  $x$ . En effet, puisque  $\mu$  parcourt toute la suite des entiers du corps,  $\varepsilon\mu$  parcourt aussi toute cette suite, par conséquent :

$$Z(s; x + 2\log \varepsilon) = Z(s; x) .$$

On peut donc développer  $Z$  en série de Fourier

$$Z(s; x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{\frac{\pi i n}{\log \varepsilon} x} .$$

Il se trouve précisément que  $c_0$  (à un facteur banal près) est  $\zeta_k(s)$  et que les autres coefficients  $c_n$  sont liés simplement aux fonctions :

$$\zeta(s, \lambda_n) = \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_n(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_n(\pi)}{|N(\pi)|^s}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

où

$$\lambda_n(\mu) = e^{\frac{\pi i n}{\log \varepsilon} \log \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|} ;$$

on voit que

$$\lambda_n(\varepsilon\mu) = \lambda_n(\mu) ; \quad \lambda_n(\alpha\beta) = \lambda_n(\alpha) \cdot \lambda_n(\beta) .$$

Cette suite infinie de fonctions est en quelque manière un équivalent de la fonction de deux variables  $Z(s; x)$ . Par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier du corps en produit de facteurs premiers, on tire des faits précédents, le résultat suivant: *L'expression  $m^2 - 3n^2$  représente une infinité de nombres premiers, même si l'on ne considère que les nombres  $m, n$  situés dans le plan des  $m, n$  à l'intérieur d'un angle de sommet  $O(0, 0)$  et de valeur aussi petite que l'on veut.*

La représentation intégrale bien connue de  $\Gamma(s)$  permet de passer à une autre fonction de 2 variables, qui n'est pas autre chose qu'une série thêta à deux variables:

$$\mathfrak{Z}(\tau, \tau') = \sum_{\mu} e^{\pi i (\tau \mu^2 + \tau' \mu'^2)} ,$$

la sommation étant étendue à tous les nombres entiers du corps;  $\tau$  et  $\tau'$  sont des variables complexes dont la partie imaginaire a un

coefficient positif. La théorie des fonctions théta permet de déduire les propriétés d'invariance:

$$\mathfrak{S}(\varepsilon^2\tau, \varepsilon'^2\tau') = \mathfrak{S}(\tau, \tau'), \quad \mathfrak{S}(\tau + \alpha, \tau' + \alpha') = \mathfrak{S}(\tau, \tau') \quad (1)$$

(pour tout entier  $\alpha$ )

et

$$\mathfrak{S}^8\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}\right) = (\gamma\tau + \delta)^4 (\gamma'\tau' + \delta')^4 \mathfrak{S}^8(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant quatre entiers quelconques du corps, assujettis à satisfaire à la condition  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , et à certaines congruences relatives au module 4.

Avec l'aide d'une formule particulière de l'espèce précédente, on peut démontrer que  $Z(s; x)$  est prolongeable et l'on en tire une équation fonctionnelle pour cette même  $Z(x; s)$ ; par suite, on en déduit des résultats analogues pour toutes les  $\zeta(s, \lambda_n)$ . Celles-ci sont, après multiplication par  $(s - 1)$ , des fonctions transcendentes entières de  $s$ .

Grâce à ces fonctions théta, nous avons réussi à atteindre le domaine des *fonctions modulaires à deux variables*. On en déduit des conclusions qui peuvent être considérées comme une généralisation de la théorie de la division du cercle, et de celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Si l'on n'a égard qu'à l'invariance suivant les équations (1), on arrive, par exemple, aux séries suivantes:

$$\varphi(\tau, \tau') = \sum_{\mu > 0} e^{\pi i(\tau\mu + \tau'\mu')} N(\mu)^{k-1}$$

$k$  étant un nombre fixe  $\geq 1$ ; la sommation ne porte que sur les entiers totalement positifs du corps c'est-à-dire sur ceux pour lesquels on a, à la fois  $\mu > 0, \mu' > 0$ . Ces fonctions représentent la véritable généralisation de la fonction exponentielle pour le cas de plusieurs variables; elles se décomposent en fractions rationnelles, pour ainsi dire:

$$\varphi(\tau, \tau') = A(k) \sum_x \frac{1}{(\tau\sqrt{3} + \mu)^k (\tau'\sqrt{3} - \mu')^k},$$

$A(k)$  étant indépendant de  $\tau$  et  $\tau'$ ; la sommation porte sur tous les entiers du corps. Cette équation correspond à la décomposition bien connue de  $\cot \pi z, \frac{1}{\sin^2 \pi z}$ , etc.... Mais alors que ces fonctions sont prolongeables dans tout le plan des  $z$ , les pôles et un point singulier essentiel mis à part, on constate que  $\varphi(\tau, \tau')$  n'est définie que dans le domaine où  $\tau$  et  $\tau'$  ont des coefficients de  $\sqrt{-1}$  positifs. Il est possible d'étudier l'allure de  $\varphi$  dans le voisinage des points (singuliers),

frontières de ce domaine. En effet, puisque  $\varphi(\varepsilon\tau, \varepsilon'\tau') = \varphi(\tau, \tau')$  on en déduit pour  $\varphi(\tau e^x, \tau' e^{-x})$  un développement de Fourier d'après  $e^{\frac{2\pi i x}{\log \varepsilon}}$ , ce développement met alors en évidence l'allure de  $\varphi$  dans le voisinage de  $\tau = \tau' = 0$ ;  $\varphi$  est infini comme  $\frac{\text{const}}{\tau\tau'}$ ; des développements analogues sont valables dans le voisinage des points  $\tau = \frac{\rho}{2\sqrt{3}}$ ,  $\tau' = \frac{-\rho'}{2\sqrt{3}}$  où  $\rho$  est un non-entier du corps. Lorsqu'on s'approche de ces points  $\varphi$  ne devient infini que comme  $\mathcal{C} \log\left(\tau - \frac{\rho}{2\sqrt{3}}\right)\left(\tau' + \frac{\rho'}{2\sqrt{3}}\right)$ ; ces facteurs  $\mathcal{C}$  sont liés aux *nombres de classes de certains corps supérieurs*.

Pour le traitement analytique de la théorie additive des nombres dans  $K(\sqrt{3})$ , les fonctions  $\varphi$  forment le moyen le plus commode.

Enfin par une nouvelle sommation, les fonctions  $\varphi$  engendrent les fonctions modulaires et celles-ci donnent lieu à des représentations analogues aux *séries d'Einstein*. Par exemple, sommons par rapport à tous les  $\mu$  entiers, et plus par rapport aux seuls nombres non associés  $\kappa (\kappa \neq 0)$ , dans l'expression:

$$f(\tau, \tau') = \sum_{(\kappa)} \frac{1}{(\kappa\kappa')^k} + \sum_{(\kappa)} \sum_{(\mu)} \frac{1}{(\kappa\tau + \mu)^k (\kappa'\tau' + \mu')^k}.$$

Pour une valeur entière de  $\kappa$  supérieure à 2,  $f(\tau, \tau')$  est absolument convergente et l'on a:

$$f\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}\right) = (\gamma\tau + \delta)^k (\gamma'\tau' + \delta')^k f(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant des entiers du corps de déterminant 1.

2. — CONFÉRENCE de M. Michel PLANCHEREL (Zurich): *Sur le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites de la physique mathématique.* — Le passage du discret au continu peut se faire en mécanique de deux manières différentes. Ou bien on effectue le passage à la limite sur les équations du mouvement; on est ainsi conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles que l'on regarde alors comme les équations du mouvement des milieux continus. Ou bien on effectue plus tard ce passage à la limite, à savoir sur les solutions du problème discret. Alors que la première manière est celle que les mathématiciens du XVIII<sup>me</sup> et du début du XIX<sup>me</sup> siècle ont souvent utilisée pour trouver les équations des milieux continus, la seconde a été entre les

mains de physiciens tels que lord Rayleigh un procédé heuristique puissant pour trouver les solutions des problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles, par exemple, l'existence d'une infinité de vibrations fondamentales et leurs propriétés. Tout naturellement la question se pose: est-ce que ces deux passages à la limite conduisent aux mêmes résultats? En d'autres termes: les petits mouvements d'un système continu autour d'une position d'équilibre peuvent-ils être envisagés comme cas limite des petits mouvements d'un système fini de points matériels?

Formulé mathématiquement dans le cas le plus simple, le problème est le suivant: Soit

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu + \lambda u = f(x) \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

un problème aux limites pour une équation adjointe à elle-même. On suppose  $p(x) > 0$ . Soit d'autre part

$$\frac{1}{h^2} \Delta (p_i \Delta u_{i-1}) + q_i u_i + \lambda u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

$$u_0 = u_n = 0 \quad (4)$$

le problème aux limites pour l'équation aux différences correspondante. Ici

$$h = \frac{1}{n}, \quad p_i = p \left( \frac{i}{n} \right), \quad q_i = q \left( \frac{i}{n} \right), \quad f_i = f \left( \frac{i}{n} \right).$$

Peut-on affirmer que si  $n$  tendant vers l'infini et  $\frac{i}{n}$  vers  $x$ , on a  $\lim u_i = u(x)$ ? Peut-on calculer les valeurs et les fonctions fondamentales de l'équation homogène correspondant à (1) comme limites des valeurs et des solutions fondamentales des équations homogènes correspondant à (3)?

La réponse est affirmative et le but de la conférence était d'esquisser la méthode permettant de donner cette réponse.

Les étapes de la démonstration sont en gros les suivantes:

A. On introduit pour les équations aux différences (3) une expression jouant pour elle le même rôle que la fonction de Green de l'équation (1) et ayant des propriétés analogues.

B. On résoud directement le passage à la limite du problème

$$\frac{1}{h^2} \Delta^2 u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

$$u_0 = u_n = 0 \quad (6)$$



au problème 
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad (7)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (8)$$

C. On ramène ensuite la résolution de l'équation (1) sous les conditions (2) à celle d'une équation intégrale

$$u(x) + \int_0^1 K(\lambda; x, y) u(y) dy = F(x) \quad (9)$$

où  $K$  dépend de la fonction de Green de (7).

On ramène, d'une manière analogue, la résolution des équations (3) sous les conditions (4) à celle d'un système

$$u_i + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} K_{ik} u_k = F_i \quad (10)$$

où  $K_{ik}$  dépend de  $\lambda$  et de la fonction de Green de (5). De plus, lorsque  $n$  tend vers l'infini et lorsque

$$\frac{i}{n} \rightarrow x, \quad \frac{k}{n} \rightarrow y$$

$$\lim K_{ik} = K(\lambda; x, y), \quad \lim F_i = F(x)$$

Les résultats classiques de M. Hilbert sur la résolution d'une équation intégrale par le passage à la limite d'un système d'équations algébriques permettent alors de conclure que la solution  $u_i$  de (10) converge vers la solution  $u(x)$  de (9).

La méthode s'étend au cas des équations aux dérivées partielles. Dans l'étape B l'équation  $\Delta u = f$  remplace tout naturellement l'équation (7). Mais le passage à la limite de B n'est plus aussi immédiat et demande une étude assez délicate. De même dans l'étape C, les noyaux qui se présentent ne sont plus bornés, ce qui exige quelques précautions nouvelles.

3. — CONFÉRENCE de M. BLASCHKE. — *Chapitres choisis de géométrie différentielle.* — Le Conférencier expose les méthodes et les problèmes de la *géométrie différentielle affine*, c'est-à-dire de l'ensemble des questions qui se formulent au moyen d'expressions invariantes vis-à-vis des transformations affines (projectivités avec conservation du parallélisme). On se rend compte que l'on peut construire une géométrie différentielle invariante vis-à-vis de l'affinité, présentant une analogie remarquable et étroite avec la géométrie différentielle ordinaire; on y peut, par exemple, définir les notions de longueur d'arc, courbure et torsion, puis pour les surfaces courbes, les notions d'aire, de normale à la surface, de lignes de courbure, d'élément d'arc, etc.,

ces notions possédant entre elles les mêmes relations que les notions correspondantes de la géométrie ordinaire.

Comme exemple d'application de ces méthodes l'auteur a démontré les théorèmes suivants:

Chaque ovale a au moins six points possédant une conique osculatrice stationnaire.

Un corps convexe dont toutes les lignes de gravité sont rectilignes est nécessairement un ellipsoïde. Les lignes de gravité sont les courbes, lieux des centres de gravité de sections planes parallèles.

Enfin, l'auteur exposa les plus simples problèmes de variation de la géométrie affine (Intégrales simples et intégrales doubles avec ou sans conditions auxiliaires).

La bibliographie du sujet se compose des mémoires classés sous le titre de « Ueber affine Geometrie, I-XXV dans les *Leipziger Berichte* 1916-1919, XXVI à XXXII dans la *Mathematische Zeitschrift*, 1922, et XXIII à XXXVII dans les *Abhandlungen des math. Seminars der Hamburgischen Universität*, 1 (1922). Le deuxième volume des *Vorlesungen über Differentialgeometrie* du conférencier lui-même (Springer, Berlin, 1923) donnera un exposé synthétique de la question.

#### COMMUNICATIONS.

1. — M. G. POLYA (Zurich). — *Prolongement analytique*. — Je dirai qu'une fonction  $f(z)$  est de « type normal » dans l'angle  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$  si  $f(z)$  est holomorphe dans cet angle et y satisfait à une inégalité de la forme  $|f(z)| < A e^{a|z|}$ ,  $A$  et  $a$  étant des constantes positives. Pour une fonction entière de type normal l'angle comprend le plan entier. Soit  $g(z)$  une fonction entière de type normal. Je désignerai la fonction

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\lg |g(re^{i\varphi})|}{r}$$

de la variable réelle  $\varphi$  comme « l'indicateur » de  $g(z)$ .

1. L'indicateur est la « fonction caractéristique » (= Stützgeradenfunktion) d'une courbe convexe, dite la « figure adjointe » de  $g(z)$ , qui dans des cas particuliers peut se réduire à un polygone, à un segment de droite ou à un point.

2. Le prolongement analytique des séries

$$\bar{g}(0)w^{-1} + \bar{g}'(0)w^{-2} + \bar{g}''(0)w^{-3} + \dots = \mathcal{B}(w)$$

$$\bar{g}(0)e^{-w} + \bar{g}(1)e^{-2w} + \bar{g}(2)e^{-3w} + \dots = \mathcal{C}(w)$$

$$\bar{g}(\lg 1)1^{-1-w} + \bar{g}(\lg 2)2^{-1-w} + \bar{g}(\lg 3)3^{-1-w} + \dots = \mathcal{D}(w)$$

est holomorphe et uniforme à l'extérieur de la figure adjointe de  $g(z)$  mais a un point singulier sur chaque droite qui s'appuie sur cette figure (chaque « Stützgerade »). Dans le cas des séries  $\mathcal{B}(w)$  et  $\mathcal{D}(w)$

je parle du plan entier des  $\omega$ ,  $g(z)$  étant une fonction de type normal quelconque, dans le cas de la série  $\mathcal{C}(\omega)$  je ne considère qu'une bande horizontale de largeur  $2\pi$  à l'intérieur de laquelle la figure adjointe de  $g(z)$  est supposée comprise.

3. Une fonction  $f(z)$  de type normal dans le demi-plan  $\mathcal{R}(z) \geq 0$  satisfaisant aux conditions

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \dots = 0$$

$$|f(+ir)| + |f(-ir)| < \exp \left( r \left( \pi - \frac{a}{\lg r \cdot \lg_2 r \dots \lg_{m-1} r (\lg_m r)^{1+\varepsilon}} \right) \right)$$

pour  $r$  assez grand,  $a$  étant une constante positive, s'annule identiquement si  $\varepsilon = 0$ , mais peut être  $\neq 0$ , si  $\varepsilon > 0$ .

4. Une fonction entière  $g(z)$  satisfaisant à une inégalité de la forme  $|g(z)| < |z|^a e^{\pi|z|}$  pour  $|z|$  suffisamment grand qui s'annule pour  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  est  $\equiv \mathcal{Q}(z) \sin \pi z$ , ou  $\mathcal{Q}(z)$  est un polynôme.

5. Soit  $N(r)$  le nombre des zéros de  $g(z)$  dans le cercle  $|z| \leq r$ ,  $g(z)$  désignant une fonction entière de type normal. On a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r} \leq \frac{U}{2\pi}$$

$U$  désignant le pourtour de la figure adjointe de  $g(z)$ .

6. Admettons pour simplifier que tous les points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière soient des pôles. On peut affirmer que l'arc entre deux pôles consécutifs quelconques n'excède pas une fraction de la circonférence égale au taux des coefficients différents de zéro de la série en question. Admettons maintenant, que les coefficients sont réels et différents de zéro. Si le point positif du cercle de convergence est un point ordinaire de la série l'arc de régularité qui le contient ne surpasse pas une fraction du cercle égale au taux des variations des coefficients. (Les taux en question sont déterminés par des  $\overline{\lim}$ .)

On remarquera que ces énoncés apportent quelques précisions à des théorèmes bien connus de MM. Borel, Carlson, Fabry, Lindelöf, Phragmén, Vivanti etc. C'est surtout grâce à la remarque 1 qu'une simplification notable et une coordination naturelle de toutes les questions connexes deviennent possibles.

2. — M. D. MIRIMANOFF (Genève). — *Sur un problème de la théorie de la mesure.* — Il y a deux ans environ, M. Plancherel a attiré mon attention sur le problème suivant:

*Problème.* Etant donné deux ensembles linéaires  $E_x$  et  $E_y$  répartis, le premier sur un segment  $OA$  de l'axe  $Ox$  et le second sur un segment  $OB$  de l'axe  $Oy$ , on mène par les points de  $E_x$  des droites parallèles à  $Oy$  et par les points de  $E_y$  des droites parallèles à  $Ox$ . Soient  $E$  l'ensemble de tous les points d'intersection de ces deux familles de

droites et  $E_\lambda$  la projection orthogonale de  $E$  sur une droite quelconque  $O\lambda$  formant avec  $Ox$  un angle  $\vartheta$ . Quelle est la mesure de  $E_\lambda$  ?

Je donnerai la solution de ce problème pour le cas où les ensembles  $E_x$  et  $E_y$  appartiennent à la catégorie des ensembles parfaits que M. Denjoy désigne sous le nom d'ensembles présentant le caractère (A)<sup>1</sup> et que j'appelle ensembles parfaits de première espèce.

Soit  $E$  un ensemble parfait de 1<sup>re</sup> espèce construit sur un intervalle  $(a, b)$ . On sait que son complémentaire se compose d'un ensemble d'intervalles ouverts  $\delta_i$  que j'appellerai, avec M. W. H. Young, les intervalles noirs de  $E$ .

On peut établir la propriété suivante: Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux points quelconques de  $(a, b)$  n'appartenant pas à un même intervalle noir de  $E$  (l'un des points  $\alpha, \beta$  peut être situé en dehors de  $(a, b)$ ) et si  $\mathcal{E}$  est un ensemble parfait quelconque de 1<sup>re</sup> espèce construit sur  $(\alpha, \beta)$ , les ensembles  $E$  et  $\mathcal{E}$  ont des points communs.

Revenons à notre problème.

Soient  $E_x$  et  $E_y$  deux ensembles parfaits de 1<sup>re</sup> espèce construits sur  $OA$  et  $OB$ ; l'ensemble plan  $E$  construit à partir de  $E_x$  et  $E_y$  est enfermé à l'intérieur d'un rectangle. A tout intervalle noir  $\delta_i$  de  $E_x$  correspond une *bande noire verticale* comprise entre les parallèles à  $Oy$  passant par les extrémités de  $\delta_i$ . De même, à tout intervalle noir de  $E_y$  correspond une *bande noire horizontale*.

Soit maintenant  $d$  une droite quelconque coupant le contour du rectangle, et  $d_0$  la portion de  $d$  comprise à l'intérieur de ce contour. On peut établir le théorème suivant:

*Théorème.* Pour que la droite  $d$  passe par un point de  $E$ , il faut et il suffit que les deux extrémités de  $d_0$  n'appartiennent pas à une même bande noire.

La solution du problème de M. Plancherel en découle immédiatement.

Supposons, pour fixer les idées,  $OA = OB = 1$  et  $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$ .

On a alors

$$m(E_\lambda) = \sin \vartheta + \cos \vartheta - \sum_i (\delta_i \cos \vartheta - \sin \vartheta),$$

la somme étant étendue à tous les  $i$  tels que  $\delta_i > \operatorname{tg} \vartheta$ .

Un exposé complet de ces recherches paraîtra dans le t. IV des *Fundamenta mathematicae*, actuellement sous presse.

3. M. Ed. GUILLAUME (Berne). — *A propos des discussions de la Théorie d'Einstein au Collège de France.* — L'auteur rappelle l'objection qu'il a présentée à Paris, quelques semaines auparavant, et qui a été reproduite dans la *Revue générale des Sciences* (n° 11, p. 322-324, 1922).

<sup>1</sup> *Accademia dei Lincei*, novembre 1920, p. 291 et 316.

### Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

MATHÉMATIQUES. — *Grand Prix des sciences mathématiques*, prix fondé par l'Etat: 3000 fr. — L'Académie avait mis au concours la question suivante: *Détermination de classes étendues de surfaces par des propriétés données de leurs lignes géodésiques considérées dans l'espace ordinaire*. Aucun mémoire n'a été déposé sur cette question. — Le prix est décerné à M. Jean LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, pour l'ensemble de ses travaux.

*Prix Poncelet*, 2000 fr., à M. J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

*Prix Francœur*, 1000 fr., à M. ANTOINE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Strashourg, pour ses travaux sur la géométrie.

MÉCANIQUE. — *Prix Montyon*, 700 fr., à M. Farid BOULAD, membre de l'Institut d'Egypte, ingénieur du service des ponts et chemins de fer de l'Etat égyptien.

*Prix Fourneyron*, 1000 fr., à M. J.-A. FARCOT d'ALBARET, pour ses travaux sur les moteurs thermiques.

ASTRONOMIE. — *Médaille Lalande*, à M. Norris RUSSEL, directeur de l'Observatoire de Princeton.

*Prix Benjamin-Valz*, 460 fr., à M. J. CAZY, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, pour ses travaux de Mécanique céleste et en particulier pour son mémoire intitulé: *De l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment*.

*Médaille Janssen*, à M. C. STØRMER, professeur à l'Université de Christiania, pour ses travaux sur les aurores boréales.

PRIX GÉNÉRAUX. — *Prix Houllevigue*. 5000 fr., à M. Rodolphe SOREAU, professeur au Conservatoire national des arts et métiers, pour ses travaux sur l'aviation et son ouvrage *Nomographie ou traité des abaques*.

FONDS DE RECHERCHES SCIENTIFIQUES. — *Fondation Henri Becquerel*, 3000 fr., à M. DANJÈON, astronome à l'Observatoire de Strashourg. — *Fondation Loutreuil*, 3000 fr., à M. Auguste LEBEUF, directeur de l'Observatoire national de Besançon; 15,000 fr. à M. Jean MASCART, directeur de l'Observatoire de Lyon; 15,000 fr., à l'Académie des Sciences, pour la publication de l'inventaire des périodiques scientifiques dans les bibliothèques de Paris.

### Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. H. FALKENBERG, privat-docent à l'Université de Koenigsberg, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Giessen.

M. F. HARTOGS, de l'Université de Munich, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Francfort a. M.

M. D. HILBERT a été nommé docteur honoraire de l'Université de Francfort et de l'École Polytechnique de Zurich.

M. R. KÖNIG, de l'Université de Tubingue, est nommé professeur à l'Université de Munster.

M. H. RADEMACHER, privat-docent à l'Université de Berlin, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Hambourg.

M. J. SCHUR, professeur à l'Université de Berlin, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Berlin.

**Belgique.** — Le gouvernement vient d'accorder un subside à M. STUYVAERT pour lui permettre d'imprimer sa *Méthodologie mathématique*.

**France.** — *Faculté des Sciences de Paris.* — M. CARTAN, professeur de mécanique rationnelle, est chargé du cours de mécanique analytique et de mécanique céleste (chaire de M. Painlevé). — M. MONTEL, professeur de mathématiques générales, est chargé du cours de mécanique rationnelle. — M. DENJOY, professeur à l'Université de Strasbourg, est chargé du cours des mathématiques générales. — Pour les conférences, sont désignés: MM. CAHEN (mécanique rationnelle), LAMBERT (astronomie).

*Université de Strasbourg.* — L'Institut de Mathématiques continue sa marche ascendante. Depuis l'armistice, il a délivré deux diplômes d'études supérieures et deux doctorats ès sciences; dix de ses auditeurs ont été admis à l'agrégation de mathématiques. En ce qui concerne les certificats d'études supérieures délivrés par la Faculté des Sciences, le nombre de ceux qui relèvent des sciences mathématiques a suivi la progression suivante: 1919, 13; 1920, 18; 1921, 31; 1922, 40.

**Italie.** — *Reale Accademia dei Lincei.* Dans la section des Mathématiques pures et appliquées ont été élus: MM. P. BURGATTI et L. TONELLI (Bologne), L. LOMBARDI (Rome), M. PANETTI (Turin), membres correspondants; MM. E. T. WHITTAKER (Edimbourg), E. LANDAU (Göttingue), associés étrangers.

### Charles Cailler.

L'*Enseignement Mathématique*<sup>1</sup> a déjà signalé la mort prématurée de son distingué collaborateur, M. Charles Cailler, décédé le 30 janvier 1922, à l'âge de 57 ans. Savant de grande valeur et maître incom-

<sup>1</sup> Tome XXII, p. 225. — Voir aussi la Notice sur Ch. Cailler, suivie de la liste de ses publications, par H. FEHR, *Actes de la Soc. helv. des Sciences nat.*, 1922; ainsi que celle de R. WAVRE, dans les *Archives des Sciences phys. et nat.*, Genève, 1922. N. D. L. R.

parable, Charles Cailler a enseigné les mathématiques à l'Université de Genève pendant plus de 30 ans. J'ai eu la bonne fortune d'assister, il y a 25 ans, à quelques-unes de ses leçons et notamment à son cours de mécanique, à un cours d'hydrodynamique et à un cours de calcul des probabilités. J'en ai gardé un souvenir inoubliable. A cette époque M. Cailler était encore très jeune, mais déjà dans sa manière d'exposer les théories les plus difficiles et les plus transcendantes, il avait ces qualités d'élégance et de charme qui ont toujours fait l'admiration de ses élèves et de ses collègues. Déjà, il avait cette finesse et cette clarté, ce sens assez rare de la mesure et des proportions et ce souci de la rigueur qu'il tenait peut-être en partie de son maître Charles Cellérier et qu'on trouve dans toutes ses publications. C'était un mathématicien de race, — il était né géomètre.

Guidé par un instinct mathématique très sûr, il se mouvait à l'aise au milieu des problèmes les plus compliqués, les plus subtils, les plus ardu. Dans ses travaux sur l'équation d'Abel et les fonctions de Bessel, dans ses mémoires sur les géométries non-euclidiennes, dans ses notes sur la théorie d'Einstein, aussi bien que dans le grand ouvrage sur la mécanique qu'on va, je l'espère, publier prochainement et qui nous réserve des surprises, il a fait preuve d'une sagacité, d'une pénétration et d'une profondeur hors ligne.

Sa pensée ne glissait pas sur la surface des problèmes dont il abordait l'étude, elle cherchait à aller au fond des choses. Et l'on avait le sentiment que dans ses recherches il était guidé, comme l'a dit Poincaré en parlant du vrai géomètre, « par quelque vague conscience d'une géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit ».

D. MIRIMANOFF (Genève).

### Nécrologie.

M. AMSTEIN, professeur honoraire de l'Université de Lausanne, est décédé dans sa 82<sup>me</sup> année.

M. Charles-Léonard BOUTON, professeur à la Harvard University Cambridge, Mass., est décédé à l'âge de 53 ans.

M. Eugène CLEVERS, qui fut délégué de la Belgique au Congrès de Cambridge, en 1912, vient de mourir à Gand à l'âge de 67 ans.

M. H. GRASSMANN, professeur à l'Université de Giessen et fils du savant géomètre Hermann Grassmann, est décédé le 21 février 1922, à l'âge de 65 ans.

M. G.-B. HALSTED. — Le géomètre américain G. B. Halsted est mort à New York dans sa 65<sup>me</sup> année. On lui doit notamment un traité de géométrie rédigé d'après les principes de Hilbert (*Rational Geometry*, 1904, revised 1907, trad. en français par P. Barbarin, 1911), ainsi que de nombreuses notes et traductions dans le domaine de la géométrie non-euclidienne. Halsted a aussi traduit plusieurs

ouvrages de H. Poincaré, *Science and Hypothesis*, *The Value of Science*, *Science and Method*.

M. A. HÖFLER, professeur à l'Université de Vienne, est décédé le 26 février 1922, à l'âge de 68 ans.

M. G.-J. KAPTEYN. — Nous apprenons avec regret la mort du savant astronome hollandais, Jacobus Kornelius Kapteyn, professeur à l'Université de Groningue, décédé le 18 juin 1922, dans sa 72<sup>me</sup> année. G.-J. Kapteyn était correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, membre associé de la Royal Astronomical Society de Londres et membre d'honneur de nombreuses sociétés scientifiques.

---

## NOTES ET DOCUMENTS

---

### FRANCE

#### Dispense de la licence en vue du doctorat ès sciences.

Sur la proposition du Conseil supérieur de l'Instruction publique le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts a pris un arrêté permettant l'accès au doctorat de candidats déjà pourvus de grades étrangers admis comme équivalents ou supérieurs au diplôme de licence. Nous nous bornons à reproduire ici la liste concernant les grades scientifiques donnant accès au *doctorat ès sciences*. Des dispositions analogues ont été adoptées pour les facultés des Lettres et de Droit.

Sont dispensés de produire le diplôme de licencié les candidats au doctorat qui pourront justifier des titres ou grades suivants reconnus à cet égard comme équivalents ou supérieurs:

*Grande-Bretagne et Irlande.* — B. A. honneurs 1<sup>re</sup> classe des universités d'Oxford et de Cambridge.

B. S. honneurs 1<sup>re</sup> classe de l'université de Londres et des universités provinciales.

M. H. honneurs 1<sup>re</sup> classe des universités écossaises.

B. A. honneurs 1<sup>re</sup> classe des universités irlandaises.

*Belgique.* — Doctorat ès sciences, grade légal.

*Bulgarie.* — Certificat de 2<sup>me</sup> examen des universités délivré après quatre années d'études.

*Danemark.* — Maîtrise ès sciences. — Candidature à la maîtrise ès sciences.

*Etats-Unis.* — Candidats présentés par une des universités désignées dans la liste ci-annexée et munis soit de la maîtrise ès sciences soit du doctorat en philosophie, soit d'un certificat attestant qu'ils ont accompli au moins deux années d'études en vue du doctorat.

*Finlande.* — Candidature en philosophie, section physique mathématique.

*Hollande.* — Maîtrise ès sciences.

*Italie.* — Laurea in matematica. Laurea in fisica et in chimica. Laurea in scienze naturali.