

# Communications.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ces notions possédant entre elles les mêmes relations que les notions correspondantes de la géométrie ordinaire.

Comme exemple d'application de ces méthodes l'auteur a démontré les théorèmes suivants:

Chaque ovale a au moins six points possédant une conique osculatrice stationnaire.

Un corps convexe dont toutes les lignes de gravité sont rectilignes est nécessairement un ellipsoïde. Les lignes de gravité sont les courbes, lieux des centres de gravité de sections planes parallèles.

Enfin, l'auteur exposa les plus simples problèmes de variation de la géométrie affine (Intégrales simples et intégrales doubles avec ou sans conditions auxiliaires).

La bibliographie du sujet se compose des mémoires classés sous le titre de « Ueber affine Geometrie, I-XXV dans les *Leipziger Berichte* 1916-1919, XXVI à XXXII dans la *Mathematische Zeitschrift*, 1922, et XXIII à XXXVII dans les *Abhandlungen des math. Seminars der Hamburgischen Universität*, 1 (1922). Le deuxième volume des *Vorlesungen über Differentialgeometrie* du conférencier lui-même (Springer, Berlin, 1923) donnera un exposé synthétique de la question.

#### COMMUNICATIONS.

1. — M. G. POLYA (Zurich). — *Prolongement analytique*. — Je dirai qu'une fonction  $f(z)$  est de « type normal » dans l'angle  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$  si  $f(z)$  est holomorphe dans cet angle et y satisfait à une inégalité de la forme  $|f(z)| < A e^{a|z|}$ ,  $A$  et  $a$  étant des constantes positives. Pour une fonction entière de type normal l'angle comprend le plan entier. Soit  $g(z)$  une fonction entière de type normal. Je désignerai la fonction

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\lg |g(re^{i\varphi})|}{r}$$

de la variable réelle  $\varphi$  comme « l'indicateur » de  $g(z)$ .

1. L'indicateur est la « fonction caractéristique » (= Stützgeradenfunktion) d'une courbe convexe, dite la « figure adjointe » de  $g(z)$ , qui dans des cas particuliers peut se réduire à un polygone, à un segment de droite ou à un point.

2. Le prolongement analytique des séries

$$\bar{g}(0)w^{-1} + \bar{g}'(0)w^{-2} + \bar{g}''(0)w^{-3} + \dots = \mathcal{B}(w)$$

$$\bar{g}(0)e^{-w} + \bar{g}(1)e^{-2w} + \bar{g}(2)e^{-3w} + \dots = \mathcal{C}(w)$$

$$\bar{g}(\lg 1)1^{-1-w} + \bar{g}(\lg 2)2^{-1-w} + \bar{g}(\lg 3)3^{-1-w} + \dots = \mathcal{D}(w)$$

est holomorphe et uniforme à l'extérieur de la figure adjointe de  $g(z)$  mais a un point singulier sur chaque droite qui s'appuie sur cette figure (chaque « Stützgerade »). Dans le cas des séries  $\mathcal{B}(w)$  et  $\mathcal{D}(w)$

je parle du plan entier des  $\omega$ ,  $g(z)$  étant une fonction de type normal quelconque, dans le cas de la série  $\mathcal{C}(\omega)$  je ne considère qu'une bande horizontale de largeur  $2\pi$  à l'intérieur de laquelle la figure adjointe de  $g(z)$  est supposée comprise.

3. Une fonction  $f(z)$  de type normal dans le demi-plan  $\mathcal{R}(z) \geq 0$  satisfaisant aux conditions

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \dots = 0$$

$$|f(+ir)| + |f(-ir)| < \exp \left( r \left( \pi - \frac{a}{\lg r \cdot \lg_2 r \dots \lg_{m-1} r (\lg_m r)^{1+\varepsilon}} \right) \right)$$

pour  $r$  assez grand,  $a$  étant une constante positive, s'annule identiquement si  $\varepsilon = 0$ , mais peut être  $\neq 0$ , si  $\varepsilon > 0$ .

4. Une fonction entière  $g(z)$  satisfaisant à une inégalité de la forme  $|g(z)| < |z|^a e^{\pi|z|}$  pour  $|z|$  suffisamment grand qui s'annule pour  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  est  $\equiv \mathcal{Q}(z) \sin \pi z$ , ou  $\mathcal{Q}(z)$  est un polynôme.

5. Soit  $N(r)$  le nombre des zéros de  $g(z)$  dans le cercle  $|z| \leq r$ ,  $g(z)$  désignant une fonction entière de type normal. On a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r} \leq \frac{U}{2\pi}$$

$U$  désignant le pourtour de la figure adjointe de  $g(z)$ .

6. Admettons pour simplifier que tous les points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière soient des pôles. On peut affirmer que l'arc entre deux pôles consécutifs quelconques n'excède pas une fraction de la circonférence égale au taux des coefficients différents de zéro de la série en question. Admettons maintenant, que les coefficients sont réels et différents de zéro. Si le point positif du cercle de convergence est un point ordinaire de la série l'arc de régularité qui le contient ne surpasse pas une fraction du cercle égale au taux des variations des coefficients. (Les taux en question sont déterminés par des  $\overline{\lim}$ .)

On remarquera que ces énoncés apportent quelques précisions à des théorèmes bien connus de MM. Borel, Carlson, Fabry, Lindelöf, Phragmén, Vivanti etc. C'est surtout grâce à la remarque 1 qu'une simplification notable et une coordination naturelle de toutes les questions connexes deviennent possibles.

2. — M. D. MIRIMANOFF (Genève). — *Sur un problème de la théorie de la mesure.* — Il y a deux ans environ, M. Plancherel a attiré mon attention sur le problème suivant:

*Problème.* Etant donné deux ensembles linéaires  $E_x$  et  $E_y$  répartis, le premier sur un segment  $OA$  de l'axe  $Ox$  et le second sur un segment  $OB$  de l'axe  $Oy$ , on mène par les points de  $E_x$  des droites parallèles à  $Oy$  et par les points de  $E_y$  des droites parallèles à  $Ox$ . Soient  $E$  l'ensemble de tous les points d'intersection de ces deux familles de

droites et  $E_\lambda$  la projection orthogonale de  $E$  sur une droite quelconque  $O\lambda$  formant avec  $Ox$  un angle  $\vartheta$ . Quelle est la mesure de  $E_\lambda$  ?

Je donnerai la solution de ce problème pour le cas où les ensembles  $E_x$  et  $E_y$  appartiennent à la catégorie des ensembles parfaits que M. Denjoy désigne sous le nom d'ensembles présentant le caractère (A)<sup>1</sup> et que j'appelle ensembles parfaits de première espèce.

Soit  $E$  un ensemble parfait de 1<sup>re</sup> espèce construit sur un intervalle  $(a, b)$ . On sait que son complémentaire se compose d'un ensemble d'intervalles ouverts  $\delta_i$  que j'appellerai, avec M. W. H. Young, les intervalles noirs de  $E$ .

On peut établir la propriété suivante: Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux points quelconques de  $(a, b)$  n'appartenant pas à un même intervalle noir de  $E$  (l'un des points  $\alpha, \beta$  peut être situé en dehors de  $(a, b)$ ) et si  $\mathcal{E}$  est un ensemble parfait quelconque de 1<sup>re</sup> espèce construit sur  $(\alpha, \beta)$ , les ensembles  $E$  et  $\mathcal{E}$  ont des points communs.

Revenons à notre problème.

Soient  $E_x$  et  $E_y$  deux ensembles parfaits de 1<sup>re</sup> espèce construits sur  $OA$  et  $OB$ ; l'ensemble plan  $E$  construit à partir de  $E_x$  et  $E_y$  est enfermé à l'intérieur d'un rectangle. A tout intervalle noir  $\delta_i$  de  $E_x$  correspond une *bande noire verticale* comprise entre les parallèles à  $Oy$  passant par les extrémités de  $\delta_i$ . De même, à tout intervalle noir de  $E_y$  correspond une *bande noire horizontale*.

Soit maintenant  $d$  une droite quelconque coupant le contour du rectangle, et  $d_0$  la portion de  $d$  comprise à l'intérieur de ce contour. On peut établir le théorème suivant:

*Théorème.* Pour que la droite  $d$  passe par un point de  $E$ , il faut et il suffit que les deux extrémités de  $d_0$  n'appartiennent pas à une même bande noire.

La solution du problème de M. Plancherel en découle immédiatement.

Supposons, pour fixer les idées,  $OA = OB = 1$  et  $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$ .

On a alors

$$m(E_\lambda) = \sin \vartheta + \cos \vartheta - \sum_i (\delta_i \cos \vartheta - \sin \vartheta),$$

la somme étant étendue à tous les  $i$  tels que  $\delta_i > \operatorname{tg} \vartheta$ .

Un exposé complet de ces recherches paraîtra dans le t. IV des *Fundamenta mathematicae*, actuellement sous presse.

3. M. Ed. GUILLAUME (Berne). — *A propos des discussions de la Théorie d'Einstein au Collège de France.* — L'auteur rappelle l'objection qu'il a présentée à Paris, quelques semaines auparavant, et qui a été reproduite dans la *Revue générale des Sciences* (n° 11, p. 322-324, 1922).

<sup>1</sup> *Accademia dei Lincei*, novembre 1920, p. 291 et 316.