§ 5. — Propriétés du plan tangent.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

En faisant varier l de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient toutes les cubiques indiquées dans le tableau de la fin du nº 10.

29. — Toutes les sections planes ont des symétries particulières, mais qui sont compatibles avec la symétrie tétraédrique de la surface. Il suffit qu'on tienne compte de la position particulière du plan sécant (25, 26, 28).

§ 5. — Propriétés du plan tangent.

30. — Nous allons établir quelques propriétés de la surface, dont on ne verra pas immédiatement les relations avec la symétrie.

Nous représenterons les coordonnées courantes d'un point de l'espace par X, Y, Z, et celles du point de contact par x, y, z. L'équation du plan tangent est:

$$(X - x)yz + (Y - y)zx + (Z - z)xy = 0 \ ,$$

ou

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3 \ .$$

Donc, les coordonnées à l'origine du plan tangent sont triples des coordonnées du point de contact. Soit ABC le triangle suivant lequel le plan tangent coupe le trièdre coordonné. Le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC.

Tout plan tangent détermine, avec les plans coordonnés, un tétraèdre de volume constant:

$$V = \frac{9}{2}p^3 \ .$$

Tout ceci rappelle des propriétés de l'hyperbole algébrique plane du second ordre.

31. — Calculons la distance d'un plan tangent à l'origine. Cette distance est donnée par une formule bien connue de Géométrie analytique.

$$d = \frac{-3}{\pm\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}}} = \frac{3xyz}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}$$

ou

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}} \ . \qquad (1)$$

32. — Nous allons chercher l'intersection de la surface par un plan tangent. Un pareil plan coupe le trièdre coordonné suivant un triangle acutangle ABC, que nous prenons comme triangle de référence.

En représentant par θ', θ'', θ''', les angles que font les plans coordonnés avec le plan tangent, nous aurons:

$$Z = \gamma \sin \theta''' .$$

(Cf. nº 27). Mais, on a:

$$\cos \theta''' = \frac{\frac{1}{z}}{+\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} ;$$

donc:

$$\sin \theta''' = \frac{+\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}}{+\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}} .$$

On a (30): OA $= 3\,x$; OB $= 3\,y$; OC $= 3\,z$. Appelons a, b, c les côtés du triangle ABC ; alors: $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{3}$, et

$$\sin \theta''' = \frac{z \,.\, \frac{c}{3}}{\frac{3p^3}{d}} = \frac{cdz}{9p^3} ,$$

par conséquent:

$$Z = \frac{cdz\gamma}{9p^3} . \tag{2}$$

Pour tout point de la section, nous aurons ainsi:

$$p^3 = \mathrm{XYZ} = \frac{abc \,.\, d^3 .\, \alpha\beta\gamma}{729p^6} .$$

La cubique, suivant laquelle le plan tangent coupe la surface, a donc pour équation:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{729p^9}{abc \,.\, d^3} . \tag{3}$$

D'autre part, on a:

$$\frac{1}{3} \times \text{triangle ABC} \times d = \frac{1}{6} \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \mathrm{OC} ;$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{27p^3}{d} . \tag{4}$$

Cherchons les coordonnées triangulaires du point de contact; dans la formule (2), supposons $Z = z$; il en résulte:

par analogie:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma = \dfrac{9p^3}{cd} \,; \\ \alpha = \dfrac{9p^3}{ad} \,; \qquad \beta = \dfrac{9p^3}{bd} \,. \end{array}\right\} \tag{5}$$

A titre d'abréviation, nous poserons:

$$m^2 = \frac{9p^3}{d} \,; \tag{6}$$

les équations (3, 4, 5) deviennent alors:

cubique : $$\alpha\beta\gamma = \frac{m^6}{abc} \,; \tag{7}$$

condition : $$a\alpha + b\beta + c\gamma = 3m^2 \,; \tag{8}$$

point de contact : $$\left.\begin{array}{c} \alpha = \dfrac{m^2}{a} \,; \quad \beta = \dfrac{m^2}{b} \,; \quad \gamma = \dfrac{m^2}{c} \,; \\ a\alpha = b\beta = c\gamma = m^2 \,. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Les dernières équations prouvent que le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC (30).

33. — On sait que tout plan, tangent à une surface, coupe cette surface suivant une courbe à point double. Dans le cas actuel, nous obtiendrons une cubique acnodale [3°, *a*], qui généralisera celle du n° 11. En opérant comme pour cette dernière, nous allons rechercher les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Une droite, passant par le point $\left(\frac{m^2}{a}, \frac{m^2}{b}, \frac{m^2}{c}\right)$, a pour équation:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = m^2\left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c}\right) \,. \tag{10}$$

En résolvant les équations (7, 8, 10), on trouve:

$$\alpha = -\frac{am^2(cv - bw)^2}{bc(av - bu)(aw - cu)} \,;$$

puis β, γ par permutation tournante. Ces équations prouvent que la courbe envisagée est unicursale.

34. — Examinons enfin la section faite par un plan parallèle au plan tangent, c'est-à-dire par un plan quelconque. Cherchons si la cubique rencontre les médianes du triangle de référence. Nous aurons les équations:

cubique :	$\alpha\beta\gamma = k^3$;
médiane :	$b\beta = c\gamma$;
condition :	$a\alpha + b\beta + c\gamma = 3m^2$.

On cherche d'abord une équation en α, en éliminant β et γ:

$$a^2\alpha^3 - 6am^2\alpha^2 + 9m^4\alpha - 4bck^3 = 0 .$$

D'après un théorème de Descartes, cette équation n'admet aucune racine négative, ou bien elle en admet une et une seule, suivant que la constante k est positive ou négative.

On cherche ensuite une équation en β, en éliminant α et γ:

$$\frac{1}{\beta^3} - \frac{3bm^2}{ack^3}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{2b^2}{ack^3} = 0 .$$

On forme le discriminant de cette équation, et l'on arrive aux conclusions suivantes:

$k^3 < 0$	cubique unipartite non singulière [2°, a] ;
$k^3 = 0$	cubique dégénérée en trois droites ;
$0 < k^3 < \frac{m^6}{abc}$	cubique bipartite [1°, a] ;
$k^3 = \frac{m^6}{abc}$	cubique acnodale [3°, a] ;
$k^3 > \frac{m^6}{abc}$	cubique unipartite non singulière [2°, a].

Cette discussion ressemble beaucoup à celle du n° 10. Elle reste la même, que le triangle de référence soit acutangle ou non (32).

De cette discussion, l'on peut déduire le théorème suivant:

Si l'on demande le lieu géométrique des points dont les distances aux trois côtés d'un triangle ont un produit constant, et si l'on détermine cette constante de manière que la cubique soit unicursale, elle sera toujours acnodale, et le centre de gravité du triangle sera le point double isolé.