Ch.-J. de la Vallée-Poussin. — Cours d'analyse infinitésimale. — Quatrième édition; 2 vol. in-8°. Tome I, ix + 434 p., 1921; tome II, xn + 478 p.. 1922; A. Uystpruyst-Dieudonné, Louvain ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.,

sont indispensables pour épargner le temps des lecteurs qui pénétreraient dans ce vaste champ pour la première fois ; notamment les notions d'intégrales de Lebesgue et de Stieltjes.

L'analyse fonctionnelle est en plein défrichage. M. Lévy à qui l'on doit, avec M. Gateaux, les principaux résultats et les idées les plus suggestives et les plus profondes dans ce domaine, laisse de nombreuses questions inachevées. Il y a là matière à des recherches qui pourraient être très fructueuses. Ceux qui s'y sont spécialisés sont rares. Mais nous croyons que la publication de ce livre, impatiemment attendue, engagera quelques jeunes mathématiciens à suivre cette voie, en même temps qu'elle facilitera et systématisera leurs recherches. Rolin WAVRE (Genève).

Ch.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN. — **Cours d'analyse infinitésimale.** — Quatrième édition; 2 vol. in-8°. Tome I, IX + 434 p., 1921; tome II, XII + 478 p., 1922; A. Uystpruyst-Dieudonné, Louvain; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Il serait superflu de rappeler l'importance et l'utilité, pour ceux qui étudient ou enseignent le calcul infinitésimal, du cours d'analyse de l'éminent mathématicien belge. La troisième édition, presque achevée, a disparu dans les flammes à Louvain en août 1914. Elle contenait une contribution personnelle étendue à la théorie des ensembles et de l'intégrale de Lebesgue. Depuis lors, M. de la Vallée-Poussin a publié ses recherches sur ce sujet dans son ouvrage : « Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire » (Paris, Gauthier-Villars, 1916). Ces questions, ainsi que celles traitées en petit texte dans l'ancienne édition, ne figurent plus dans la nouvelle. Souhaitons qu'elles puissent prendre place, avec d'autres, comme l'auteur l'espère dans un troisième volume de la présente édition.

Un progrès essentiel, réalisé en mathématique pure durant ces dernières années, a consisté à réduire au minimum les suppositions que l'on doit faire sur un être mathématique, pour pouvoir lui attribuer telle propriété, qu'on lui reconnaît dans un cas particulier. S'il est plus simple de faire dans une démonstration quelques hypothèses surabondantes, sur l'être que l'on étudie, pour énoncer une proposition, il est, par contre, plus logique de réduire ces hypothèses autant que possible, pour atteindre à un plus haut degré de généralité. Une telle méthode, avare d'hypothèses, montre, en plus, la charpente d'une théorie, la manière dont les propositions s'emboîtent les unes dans les autres. Cette préoccupation se retrouve dans de nombreux chapitres de ce cours, notamment, au début, dans l'étude des fonctions continues, des conditions de dérivation et de différentiation des fonctions explicitement ou implicitement définies. C'est ainsi, par exemple, que l'auteur donne le théorème d'existence des fonctions implicites sous la forme générale de M. Young. Au même point de vue, les théorèmes d'existence des équations différentielles et les propriétés des intégrales envisagées dans un système donné, et comme fonctions des valeurs initiales ou de certains paramètres sont traités avec plus de soin qu'on ne le fait d'ordinaire. Si M. de la Vallée-Poussin n'a pas abordé, dans ce cours, l'étude des fonctions analytiques, des travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass, c'est au bénéfice d'une étude plus détaillée et plus minutieuse du domaine réel. Mentionnons, sans avoir la prétention d'être complet dans notre analyse, certains chapitres dont l'étude est spécialement approfondie.

Les intégrales eulériennes, exposées déjà dans la première édition, sont reprises ici d'une façon détaillée : nombres de Bernoulli, fonctions B et Γ, formule de Legendre, produit d'Euler, intégrale de Raabe, expression des eulériennes en produit infini et représentation asymptotique.

L'auteur nous avise modestement dans sa préface, que l'on reconnaîtra sans peine dans ce chapitre l'empreinte de l'enseignement d'Hermite.

Dans un nombre de pages équivalent, une trentaine environ, l'auteur donne un exposé qui nous paraît assez étendu des propriétés que l'on peut énoncer relativement aux séries de Fourier et aux séries trigonométriques, sans faire intervenir la notion d'intégrale de Lebesgue. Mentionnons : le théorème de Riemann en vertu duquel la manière dont se comporte la série de Fourier au point x ne dépend que des valeurs de la fonction dans le voisinage du point x ; la condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier converge vers une limite déterminée ; les critères de convergence de la série vers la fonction qui lui a donné naissance, notamment ceux de Dini et de Jordan.

Puis un certain nombre de pages sont consacrées aux procédés de sommation des séries de Fourier, au théorème de Hardy-Landau, à l'étude des singularités des séries de Fourier, puis à l'étude des séries trigonométriques quelconques dans laquelle, comme on sait, la dérivée seconde généralisée de Riemann et un théorème de Schwarz jouent un rôle essentiel et permettent d'arriver au théorème de l'unicité du développement.

Mentionnons, en passant, une introduction très courte, mais très suggestive au calcul des différences finies. Les applications géométriques n'ont point été négligées. En particulier, l'étude des lignes tracées sur une surface y occupe une soixantaine de pages et les lignes géodésiques à elles seules une vingtaine. On sait l'importance de cette dernière notion, ainsi que celle de courbure dans la mécanique relativiste. Ceux auxquels l'étude de la multiplicité riemannienne à quatre dimensions paraîtrait trop formelle trouveront dans ces quelques pages et sans avoir besoin de consulter les leçons de Darboux, une étude détaillée de ces notions, attachées à la forme métrique de Riemann, pour une multiplicité visible et tangible à deux dimensions. Mentionnons les notions de courbure et de torsion géodésique; invariance de la courbure géodésique relativement à une déformation de la surface ; équation différentielle des géodésiques en coordonnées quelconques ; étude des lignes géodésiques infiniment voisines, condition pour qu'elles ne se coupent pas ; unicité d'une géodésique passant par deux points sur une surface à courbure négative ; expression de la longueur d'une géodésique, condition pour qu'elle jouisse de la propriété connue de minimum et enfin, coordonnées polaires géodésiques.

Je suspends ici cette analyse. Qu'il me suffise d'avoir montré que, pour le domaine réel, le cours de M. de la Vallée-Poussin est sur de nombreux points, plus détaillé que ceux de MM. Jordan, Picard ou Goursat, auxquels on sera souvent tenté de le comparer.

Il faudrait une analyse plus approfondie pour dégager l'apport personnel de l'auteur aux matières qui y sont abordées. Cet apport est certainement très important.

R. Wavre (Genève).