

# RÉCRÉATION MATHÉMATIQUE. LE JEU DE CLOCHE ET MARTEAU

Autor(en): **Jéquier, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515747>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## RÉCRÉATION MATHÉMATIQUE.

---

### LE JEU DE CLOCHE ET MARTEAU

PAR

M. JÉQUIER (Neuchâtel).

---

Connaissez-vous le Jeu de Cloche et Marteau ? Il est fort divertissant pour jeunes et vieux. Durant les longues soirées d'hiver, les membres des familles nombreuses spécialement rivalisent d'intuition aiguisée par la soif du gain pour découvrir les lois suivant lesquelles le Hasard manifeste ses volontés capricieuses et inéluctables, décevant souvent les espérances, en apparence les mieux fondées.

Il nous a paru curieux d'étudier ce jeu sous le jour du Calcul des Probabilités, à simple titre de curiosité mathématique et sans autre prétention.

Voici les *règles du jeu* :

1. Le nombre  $n$  des joueurs peut être quelconque; toutefois, il ne doit être ni trop faible, ni trop grand; il est généralement compris entre 5 et 10.

2. Chaque joueur reçoit au début de la partie un nombre  $m$  de jetons de la Caisse commune, qui est tenue par l'un des joueurs.

3. A part les jetons, le matériel du jeu comprend :

a) 8 dés à jouer. Chaque dé a 5 de ses faces non marquées, ou si l'on veut, marquées 0. La 6<sup>me</sup> face du 1<sup>er</sup> dé est marquée 1, la 6<sup>me</sup> face du 2<sup>me</sup> dé 2, etc., jusqu'au 6<sup>me</sup> dé, dont la 6<sup>me</sup> face est marquée 6. Le 7<sup>me</sup> dé porte sur une de ses faces

le dessin d'une Cloche (symbole Cl), le 8<sup>me</sup> dé a une de ses faces marquée d'un Marteau (M).

b) 5 cartes, à savoir : la *Cloche* (Cl), le *Marteau* (M.), la *Cloche-et le Marteau* (CM), le *Cheval* (Ch) et l'*Auberge* (Au).

4. Au début de la partie les cartes sont mises par l'un des joueurs choisi comme commissaire-priseur. Les cartes sont adjugées au plus offrant et dernier enchérisseur contre paiement comptant à la Caisse — paiement effectué au moyen des jetons précités.

5. Les mises terminées, le propriétaire du Cheval lance les 8 dés, qu'il passe ensuite à son voisin. Chaque joueur joue ainsi à tour et reçoit de la Caisse le montant indiqué par les dés. On lance les dés jusqu'à épuisement de la Caisse.

6. Lorsqu'un joueur amène le signe Cl ou le signe M, le montant indiqué par les 6 premiers dés doit être payé par la Caisse non à ce joueur, mais au propriétaire de Cl, respectivement de M.

7. Si un joueur amène, *à la fois*, les signes Cl et M, le montant indiqué par les dés sera payé par la Caisse au propriétaire de la carte CM.

8. Lorsqu'un joueur quelconque, autre que le propriétaire du Ch, amène 0, sans figure, il doit payer 1 à celui-là.

9. Si un joueur quelconque amène 0, avec l'une ou l'autre des figures Cl et M ou toutes les deux à la fois, le joueur ne recevra ni ne paiera rien. La somme 1 sera payée au propriétaire du Ch par le propriétaire de la carte correspondant au dé amené, Cl, M ou CM.

10. Si le propriétaire du Ch amène 0, sans figure, chacun des autres joueurs devra lui payer 1.

11. L'Auberge ne peut rapporter à son propriétaire qu'à la fin de la partie et voici comment : l'encaisse commune baisse continuellement, puisque les mises terminées, la Caisse n'opère que des versements sans jamais rien toucher. Arrive donc un coup où la somme restant en caisse est trop faible pour payer le montant indiqué par les dés : on dit alors que l'Au est « ouverte ». Supposons qu'il reste  $r$  en caisse, les dés indiquant  $s > r$ . Le joueur ayant lancé les dés paiera à l'Au la différence  $s - r > 0$ . La somme  $r$  restera en caisse. Chacun des joueurs suivants qui amènera une somme  $s > r$  paiera la différence

respective  $s - r$  à l'Au, jusqu'à ce qu'un joueur amène  $s \leq r$ , somme qu'il recevra de la caisse. Dans le cas de l'inégalité le jeu continue; dans celui de l'égalité, il est terminé puisque la Caisse doit payer précisément la somme qui lui restait. On dit alors que la Caisse « saute ».

12. si un joueur amène  $s > r$ , avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui doit payer la différence  $s - r$  à l'Au.

13. A partir du moment où l'Au est ouverte, et chaque fois que l'un des joueurs amène 0, sans figure, le propriétaire du Ch doit payer 1 à l'Au.

14. Si un joueur amène 0, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui paie 1 à l'Au.

15. Le gagnant est celui des joueurs qui, la partie terminée, a le plus grand nombre de jetons.

Ceci posé, proposons-nous de calculer l'espérance mathématique de chaque carte, ainsi que le gain probable d'un joueur seul, sans carte.

Nous pouvons remarquer, tout d'abord, que les lois régissant les divers gains changent au moment où l'Au s'ouvre. On distinguera donc la première période de la partie, s'étendant depuis le début jusqu'à l'ouverture de l'Au, et la seconde période, depuis l'ouverture de l'Au jusqu'à la fin de la partie.

L'encaisse commune étant suffisamment grande au début, la partie entière comptera un nombre de coups assez grand pour que les lois du hasard (lois des grands nombres) permettent de calculer les diverses espérances mathématiques correspondant à la première période, avec un faible écart probable. Quant à la seconde période, elle compte généralement un nombre si faible de coups qu'il serait illusoire de vouloir lui appliquer les lois des grands nombres: dans les cas pratiques les écarts relatifs seraient beaucoup trop considérables.

Nous nous bornerons donc, dans cette étude, à calculer les diverses espérances mathématiques correspondant à la première période. Comme l'Au ne fonctionne que dans la seconde, cela revient à poser égale à 0 son espérance mathématique. Les espérances mathématiques qu'on calculera pour les autres cartes



ainsi que pour les gains des joueurs sans cartes seront toutes des valeurs maxima correspondant au cas, pas très rare, où la caisse saute sans que l'Au ait rien rapporté à son infortuné propriétaire. Les valeurs calculées serviront donc de limites à ne raisonnablement pas dépasser au moment de la mise des cartes. Il sera, d'ailleurs, raisonnable, lors des mises, de se tenir sensiblement au-dessous des espérances mathématiques maxima calculées, d'une part pour se réserver une marge correspondant à la somme que la carte mise pourra être appelée à payer à l'Au, d'autre part pour se ménager la probabilité d'un gain.

Appelons :

C le montant en caisse, au début de la partie, *une fois les mises terminées* ;

$n$  le nombre de joueurs ;

N le nombre total de coups joués pendant la 1<sup>re</sup> période ;

$a$  le versement moyen de la caisse, par coup.

On a, naturellement, la relation

$$C = N \cdot a . \quad (1)$$

Cette relation suppose que l'encaisse  $r$ , au moment où l'Au s'ouvre est négligeable devant C, ce qui est pratiquement toujours le cas.

*Calcul de a.* — Appelons  $\mu$  la somme indiquée par les dés.  $\mu$  a l'une des valeurs ci-après : 0, 1, 2, 3, 4 ... 19, 20, 21. Désignons par  $\nu_{\mu}$  le nombre de possibilités différentes d'amener  $\mu$  points. On a la relation

$$a = \frac{\sum_{\mu=0,1,2\dots 21} (\nu_{\mu} \cdot \mu)}{\sum_{\mu=0,1,2\dots 21} (\nu_{\mu})} , \quad (2)$$

qui indique que le nombre total des points amenés par des combinaisons de dés différentes est égal au nombre de ces combinaisons multiplié par la moyenne des points par coup.

Le tableau ci-après résume le calcul de sommes figurant dans l'expression 2. On vérifierait aisément l'exactitude des valeurs indiquées dans la colonne des  $\nu_{\mu}$ . Par exemple, un dé pré-

sente 5 possibilités différentes d'amener le 0, puisque 5 de ses faces ne sont pas marquées, 2 dés présentent  $5^2$  possibilités, etc., 6 dés  $5^6$  possibilités différentes.

On a donc

$$\sum_{\mu=0,1,2,\dots,21} (v_{\mu}) = 46656 = 6^6, \quad (3)$$

$$\sum_{\mu=0,1,2,\dots,21} (v_{\mu} \cdot \mu) = 162 \cdot 296. \quad (4)$$

La première de ces deux sommes a une valeur évidente, car le nombre des possibilités différentes de combiner 6 à 6 les 36 faces des 6 dés est donnée par le produit  $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6$  qui est précisément égal à l'expression

$$(5 + 1)^6 = 5^6 + 6 \cdot 5^5 + 15 \cdot 5^4 + 20 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 + 1 = 6^6.$$

$\mu$	Nombre de possibilités d'amener $\mu$ points = $v_{\mu}$	$(v_{\mu} \cdot \mu)$
0	$5^6 = 15625$	0
1	$5^5 = 3125$	3125
2	$5^5 = 3125$	6250
3	$5^5 + 5^4 = 3750$	11250
4	$5^5 + 5^4 = 3750$	14000
5	$5^5 + 2 \cdot 5^4 = 4375$	21875
6	$5^5 + 2 \cdot 5^4 + 5^3 = 4500$	27000
7	$3 \cdot 5^4 + 5^3 = 2000$	14000
8	$2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 = 1500$	12000
9	$2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 = 1625$	14625
10	$5^4 + 3 \cdot 5^3 + 5^2 = 1025$	10250
11	$5^4 + 3 \cdot 5^3 + 5^2 = 1025$	11275
12	$3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 = 425$	5100
13	$2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 = 300$	3900
14	$5^3 + 3 \cdot 5^2 = 200$	2800
15	$5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5^1 = 180$	2700
16	$2 \cdot 5^2 + 5^1 = 55$	880
17	$5^2 + 5^1 = 30$	510
18	$5^2 + 5^1 = 30$	540
19	$5^1 = 5$	95
20	$5^1 = 5$	100
21	$5^0 = 1$	21

$\sum_{\mu=0,1,2,\dots,21} (v_{\mu}) = 5^6 + 6 \cdot 5^5 + 15 \cdot 5^4 + 20 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 + 1 = 6^6 = 46656$   
 $\sum_{\mu=0,1,2,\dots,21} (v_{\mu} \cdot \mu) = 162296$

Il vient donc pour  $a$

$$a = \frac{162296}{46656} = 3,4787, \quad (6)$$

et pour  $N$  (relation 1)

$$N = \frac{C}{3,4787}. \quad (7)$$

*Calcul du gain probable  $G_s$  d'un joueur seul, sans le secours d'aucune carte.* — Il s'agit de calculer le gain moyen par coup, désigné par  $b$ , réalisé par le joueur envisagé, pour son propre compte ou celui de l'un des propriétaires de cartes. De la règle 8 découlent d'emblée les inégalités :

$$b \neq a, \quad b < a \quad (8)$$

On peut se servir, pour calculer  $b$ , du tableau ci-dessus, qui a été utilisé pour déterminer  $a$ . Remarquons qu'il suffit de substituer à  $\mu=0$  la valeur  $\mu=-1$  (application de la règle 8). Nous désignerons la somme  $\Sigma(v_{\mu,\mu})$  ainsi obtenue par l'écriture

$$\left[ \sum_{\mu=-1,1,2\dots 21} (v_{\mu,\mu}) \right]_b.$$

pour la distinguer de celle figurant sous (4) qu'on peut aussi écrire de façon analogue

$$\left[ \sum_{\mu=0,1,2\dots 21} (v_{\mu,\mu}) \right]_a.$$

On obtient :

$$\left[ \sum_{\mu=-1,1,2\dots 21} (v_{\mu,\mu}) \right]_b = \left[ \sum_{\mu=0,1,2\dots 21} (v_{\mu,\mu}) \right]_a - 15625 = 162296 - 15625 = 146671. \quad (9)$$

On a naturellement :

$$\sum (v_{\mu}) = \left[ \sum (v_{\mu}) \right]_a = \left[ \sum (v_{\mu}) \right]_b, \quad (10)$$

d'où

$$b = \frac{\left[ \sum_{\mu=-1,1,2\dots 21} (v_{\mu,\mu}) \right]_b}{\sum_{\mu=0,1,2\dots 21} (v_{\mu})} = \frac{146671}{46656} = 3,1437. \quad (11)$$

Appelons  $p_{Cl}$ ,  $p_M$ ,  $p_{CM}$ ,  $p_s$  les probabilités pour les 2 dés avec figure d'amener respectivement Cl seule, sans M, M seul, sans Cl, Cl et M simultanément, aucune figure. Les dés (règle 3) donnent évidemment :

$$p_{Cl} = \frac{5}{36}, \quad p_M = \frac{5}{36}, \quad p_{CM} = \frac{1}{36},$$

$$p_s = 1 - (p_{Cl} + p_M + p_{CM}) = \frac{25}{36}. \quad (12)$$

Nous disposons maintenant des éléments nécessaires au calcul de  $G_s$ . Remarquant qu'un joueur quelconque joue, en tout,  $\frac{N}{n} = \frac{C}{a \cdot n}$  coups, son gain est donné par l'expression :

$$p_s \cdot \frac{C}{a \cdot n} \cdot b.$$

En effet, quand le joueur seul amène l'une ou l'autre des figures Cl, M ou CM son gain est 0.

En outre, le propriétaire du Ch amène  $p_0 \cdot p_s \cdot \frac{C}{n \cdot a}$  fois 0, sans figure,  $p_0$  désignant la probabilité  $\left( = \frac{15625}{46656} \right)$  d'amener le zéro.

Chaque fois, le joueur S doit payer 1 au propriétaire du Ch. Son gain net est donc :

$$G_s = p_s \cdot \frac{C}{na} \cdot b \left( 1 - \frac{p_0}{b} \right) = \frac{25}{36} \cdot \frac{3.1437}{3.4787} \frac{C}{n} \left( 1 - \frac{15625}{146671} \right) = 0,56073 \frac{C}{n}.$$

(13)

Le gain total d'un joueur ayant une ou plusieurs cartes sera constitué par le gain  $G_s$  réalisé par ce joueur lui-même, sans le secours de ses cartes, et ce que lui rapportent ses cartes. Cette conception nous permet de séparer, par la pensée, les cartes de leur propriétaire. Les cartes sont considérées comme de nouveaux joueurs *passifs*, passifs dans ce sens qu'ils ne lancent pas les dés, mais gagnent seulement quand l'un ou l'autre des  $n$  joueurs actifs amène leur figure respective. Le gain total réalisé par les  $n$  joueurs, sans l'aide de leurs cartes est par conséquent égal à

$$n \cdot G_s = p_s \frac{C}{a} b \left( 1 - \frac{p_0}{b} \right) = 0,56073 C. \quad (14)$$

La différence  $C - n G_s = 0,43927 C$  est donc gagnée par les cartes.

*Espérance mathématique de la Cloche.* — La Cl seule est amenée  $p_{Cl} \cdot N$  fois par l'ensemble des joueurs, avec un gain moyen par coup, pour Cl, égal à  $b$ . On a donc simplement :

$$G_{Cl} = p_{Cl} \cdot N \cdot b = \frac{5}{36} \cdot \frac{C}{3,4787} \cdot 3,1437 = 0,12552 C . \quad (15)$$

Nous pouvons remarquer ici qu'il n'est pas nécessaire, pour calculer  $G_{Cl}$  de spécifier si les coups favorables à Cl sont amenés par le propriétaire de Cl ou un autre joueur.

*Espérance mathématique du Marteau.* — Toutes les règles valables pour Cl s'appliquent identiquement à M. On pose donc immédiatement :

$$G_M = p_M \cdot N \cdot b = 0,12552 C , \quad (16)$$

car

$$p_M = p_{Cl} = \frac{5}{36} . \quad (12)$$

*Espérance mathématique de Cloche-et-Marteau.* — On a de même

$$G_{CM} = p_{CM} \cdot N \cdot b = \frac{1}{36} \cdot \frac{C}{3,4787} \cdot 3,1437 = 0,02510 C . \quad (17)$$

Remarquons que nous avons

$$G_{CM} = \frac{1}{5} G_{Cl} = \frac{1}{5} G_M .$$

*Espérance mathématique du Cheval.* — Le propriétaire du Ch amène  $p_0 \cdot p_s \cdot \frac{C}{n \cdot a}$  fois 0, sans figure, avec un gain par coup égal à  $n + 1$ .

En effet, chacun des  $n - 1$  joueurs paie 1 au propriétaire du Ch, ce qui fait  $n - 1$  (règle 10). En outre, le propriétaire du Ch paie 2 de sa caisse particulière de joueur seul à celle du Ch, ce qui fait bien en tout un gain par coup égal à  $n + 1$ . Il paie 2 et non pas 1, attendu que son gain  $G_s$  de joueur seul se calcule au moyen de la même formule (13) que celui des autres joueurs seuls. Comme il est propriétaire du Ch, son tour de payer de sa caisse particulière au Ch revient 2 fois moins souvent que celui

des autres joueurs. Il doit donc payer chaque fois le double de ce que paient au Ch les autres joueurs, afin que son gain  $G_s$  soit bien calculé d'après la formule (13). Nous voyons aisément que  $G_{ch}$  est donné par l'expression

$$G_{ch} = p_0 \cdot \frac{C}{na} [p_s(n+1) + p_{cl} + p_M + p_{cm} + (n-1)] \quad (19)$$

où le premier terme représente le gain dont nous venons de donner l'explication.

Les 3 termes suivants représentent les gains de Ch quand le propriétaire de cette carte amène 0 avec Cl seule, respectivement avec M seul ou CM. Le dernier terme exprime le gain fait par Ch quand les autres joueurs amènent 0, avec ou sans figure.

Remarquant que dans la parenthèse de (19) la somme

$$p_s + p_{cl} + p_M + p_{cm}$$

est égale à l'unité, l'expression de  $G_{ch}$  se réduit à la forme très simple :

$$G_{ch} = p_0 (1 + p_s) \frac{C}{a} \quad (20)$$

ou, en introduisant les valeurs numériques connues :

$$G_{ch} = \frac{15625}{46656} \left(1 + \frac{25}{36}\right) \frac{C}{3,4787} = 0,16313 C \quad (21)$$

*Vérification.* — On doit évidemment avoir, comme vérification, l'identité :

$$nG_s + G_{cl} + G_M + G_{cm} + G_{ch} \equiv C \quad (22)$$

Introduisant dans le 1<sup>er</sup> membre de cette expression les valeurs spéciales trouvées pour les différents G on obtient

$$C \frac{b + p_0}{a} \equiv C \quad (23)$$

qui devient, en remplaçant  $a$ ,  $b$  et  $p_0$  par leurs valeurs

$$C \frac{146671 + 15625}{162296} \frac{46656}{46656} \equiv C \quad , \quad \text{ou} \quad C \equiv C \quad .$$

L'identité est donc bien vérifiée.

Reproduisons en un tableau les valeurs trouvées :

$$\begin{array}{l}
 G_s = \frac{1}{n} \cdot \frac{C}{a} \cdot p_s (b - p_0) = \frac{0,56073}{n} C \left\{ \begin{array}{l} \text{Gain total des } n \text{ joueurs} \\ \text{seuls, sans carte} = nG_s \end{array} \right\} = 0,56073 C \\
 G_{cl} = \frac{C}{a} \cdot p_{cl} b = 0,12552 C \\
 G_M = \frac{C}{a} \cdot p_M b = 0,12552 C \\
 G_{CM} = \frac{C}{a} \cdot p_{CM} b = 0,02510 C \\
 G_{ch} = \frac{C}{a} \cdot p_0 (1 + p_s) = 0,16313 C
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} G_s \\ G_{cl} \\ G_M \\ G_{CM} \\ G_{ch} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Gain total de} \\ \text{toutes les cartes} \\ \\ \end{array} = 0,43927 C$$

---

**Somme totale = C**

*Remarques.* — 1. L'espérance mathématique du gain d'un joueur seul est inversement proportionnelle au nombre des joueurs. Par contre, l'espérance mathématique du gain total de tous les joueurs seuls est indépendante de leur nombre.

2. L'espérance mathématique de chacune des cartes est indépendante du nombre des joueurs.

3. Si un joueur a plusieurs cartes l'espérance mathématique de son gain total est égal à l'espérance mathématique de son gain en tant que joueur seul + la somme des espérances mathématiques de chacune de ses cartes.

4. Toutes les espérances mathématiques déterminées s'expriment en fonction de l'encaisse C au début de la partie, *une fois les mises terminées*, et sont d'ailleurs, naturellement, proportionnelles à cette grandeur. Du moment que C est inconnu des joueurs avant la clôture des mises, on ne pourra pas calculer d'avance la valeur probable de chacune des cartes. On devra attendre que, les mises terminées, le caissier ait compté à combien se monte C et alors seulement on pourra vérifier si les cartes ont été payées leur juste prix.

5. Sans pousser plus avant les calculs, on voit immédiatement que les écarts relatifs probables sont d'autant plus grands que la probabilité d'amener la figure considérée est plus faible. Les écarts relatifs probables, ordonnés par ordre décroissant, se

présentent donc comme suit : (CM), (Cl et M *ex-aequo*), (Ch), (gain moyen d'un joueur sans carte).

Appliquons les formules établies à un cas particulier. Supposons

$$C = 1500, \quad n = 6.$$

La tablelle ci-après permet de comparer les espérances mathématiques, calculées au moyen des formules trouvées, aux résultats d'une partie quelconque jouée en éliminant délibérément l'Auberge. Pour terminer la partie la caisse a simplement payé la somme  $r$  ( $r$  = somme restant en caisse avant le dernier coup de dés de la partie) à celui des joueurs ayant amené  $s > r$ .

Joueur No	Espérance math. calculée	Résultats d'une partie jouée	Moyennes de ces résultats	Ecart relatifs moyens
1	140,18	146	}	1,42 %
2	140,18	143		
3	140,18	98		
4	140,18	168		
5	140,18	143		
6	140,18	155		
Cl	188,27	158	}	2,80 %
M	188,27	208		
CM	37,65	44		
Ch	244,70	237		
Somme	<b>1499,97</b>	<b>1500</b>		

La partie a compté un nombre de coups  $N = 404$ , alors que le nombre de coups probable était  $\frac{1500}{3,4787} = 431,2$ . L'écart relatif est donc 6,3 %.

Neuchâtel, 10 décembre 1922.