

## § 6. — Sections sphériques.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## § 6. — Sections sphériques.

35. — Nous allons étudier rapidement la courbe d'intersection de la surface:

$$xyz = p^3 \quad (1)$$

et de la sphère:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 . \quad (2)$$

En éliminant  $z$  entre (1) et (2), on trouve:

$$(x^2 + y^2 - a^2)x^2y^2 + p^6 = 0 . \quad (3)$$

L'intersection complète des surfaces (1) et (2) est une courbe gauche algébrique du 6<sup>e</sup> ordre, composée de quatre parties, dont chacune entoure la projection d'un ombilic sur la sphère.

Cette courbe gauche possède encore la symétrie du tétraèdre régulier.

Elle se projette sur le plan des  $x, y$  suivant la sextique que représente l'équation (3). On a nécessairement:

$$x^2 + y^2 - a^2 < 0 .$$

Donc, la sextique, qui se compose évidemment de quatre ovales, est intérieure au cercle:  $x^2 + y^2 = a^2$ .

La courbe ne rencontre pas les axes.

36. — En résolvant l'équation (3), on obtient:

$$2xy^2 = x(a^2 - x^2) \pm \sqrt{x^6 - 2a^2x^4 + a^4x^2 - 4p^6} .$$

Examinons le cas où l'on aurait:  $a = p\sqrt{3}$ . La quantité subradicale deviendrait alors:

$$(x^2 - p^2)^2(x^2 - 4p^2) .$$

Or (35)  $x$  est moindre que  $a$ ; donc:  $x^2 < 3p^2$ . La sextique se réduit à quatre points isolés: ce sont les projections des ombilics sur le plan des  $x, y$ .

37. — L'équation polaire de la sextique est la suivante:

$$\rho^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (a^2 - \rho^2) = p^6 , \quad (4)$$

ou bien:

$$\sin^2 2\theta = \frac{4p^6}{\rho^4(a^2 - \rho^2)} .$$

38. — Le maximum et le minimum de  $\theta$  correspondent au minimum de  $\sin 2\theta$ , donc au maximum de :

$$\rho^4(a^2 - \rho^2) = (\rho^2)^2 \times (a^2 - \rho^2) .$$

Les rayons vecteurs correspondants sont donnés par l'équation :

$$\frac{\rho^2}{2} = \frac{a^2 - \rho^2}{1} = \frac{a^2}{3} ;$$

donc :

$$\rho = a \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

On trouve ensuite :

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{4\rho^6}{\frac{4}{9}a^4 \times \frac{1}{3}a^2} = \frac{27\rho^6}{a^6} ,$$

d'où :

$$\sin 2\theta_m = \pm \frac{3\rho^3 \sqrt{3}}{a^3} = \pm \left( \frac{\rho \sqrt{3}}{a} \right)^3 .$$

Cette valeur est toujours acceptable quand la sphère coupe la surface proposée, c'est-à-dire quand on a :

$$a \geq \rho \sqrt{3} .$$

Les valeurs de  $\theta_m$  et les valeurs correspondantes de  $\rho$  pourront être construites à l'aide de la règle et du compas. On voit aisément qu'on obtient ainsi huit points de la sextique, et les tangentes en ces points. De l'origine, on peut donc mener huit tangentes à la courbe. Ce sont, d'ailleurs, quatre bitangentes.

39. — Recherchons le maximum et le minimum de  $\rho$ . Soit  $F(\rho, \theta) = 0$  l'équation (4) du n° 37. On a :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta = 0 ;$$

Mais  $d\rho = 0$ , donc  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \cos^2 \theta) = 0 , \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{k\pi}{4} .$$

Comme la sextique ne rencontre pas les axes coordonnés (35),

on ne peut donner à  $k$  que des valeurs impaires. Il suffit d'examiner:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

L'équation polaire de la sextique (37) donnera les valeurs correspondantes de  $\rho$ :

$$\rho^4(a^2 - \rho^2) = 4p^6,$$

ou bien:

$$\rho^6 - a^2\rho^4 + 4p^6 = 0.$$

Cette équation, du troisième degré en  $\rho^2$ , admet toujours une racine négative, qui est à rejeter. Les deux autres sont positives quand on a:  $a \geq p\sqrt{3}$ .

40. — La sextique admet  $4 \cdot C_4^2 = 24$  bitangentes.

De la discussion qui précède, ainsi d'ailleurs que de son équation cartésienne (35), il résulte qu'elle admet la symétrie du carré. Dans son plan, elle possède quatre axes de symétrie  $\Lambda^2$ ; perpendiculairement à son plan, un  $\Lambda^4$ .

41. — On arriverait à la même sextique en étudiant la surface:

$$xyz = -p^3.$$

Ce fait s'explique, de soi-même, si l'on se rappelle que la symétrie tétraédrique est une hémiedrie de la symétrie cubique.

42. — Nous allons chercher l'équation de la sextique gauche (35) en coordonnées sphériques trilineaires absolues. Nous

emploierons un système que nous a suggéré M. Louis FOUARGE, chargé de cours à l'Université de Liège.

Une sphère, ayant son centre à l'origine, coupe le trièdre coordonné suivant un triangle trirectangle ABC, que nous prendrons comme figure de référence. D'un point quelconque M, nous abaisserons, sur les côtés du triangle fondamental, les perpendiculaires  $\alpha, \beta, \gamma$ . Soit

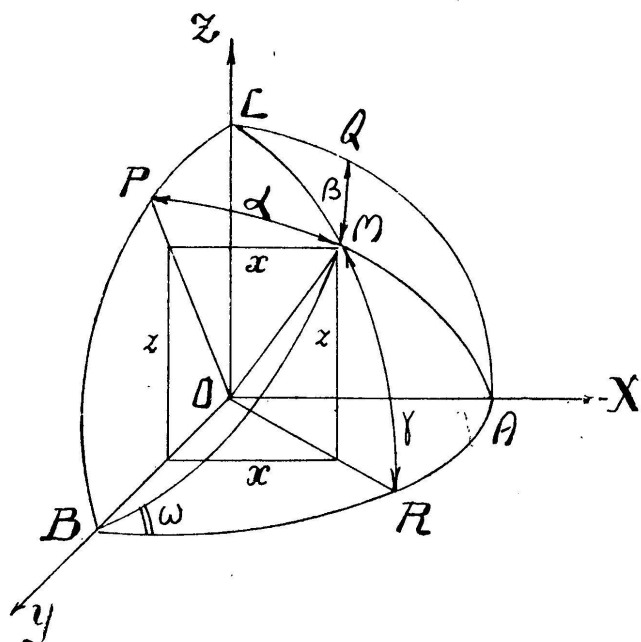


Fig. 7.

$OA = OB = OC = m$  le rayon de la sphère. On a encore  $OM = m$ . Les formules de transformation sont :

$$x = m \sin \alpha ; \quad y = m \sin \beta ; \quad z = m \sin \gamma .$$

De l'équation de la sphère:  $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$ , on déduit :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 . \quad (1)$$

Un système de coordonnées sphériques n'est entièrement déterminé que si l'on connaît l'équation d'un grand cercle.

Dans le n° 1 de la 14<sup>e</sup> année (novembre 1911) du *Bulletin scientifique de l'Association des Elèves des Ecoles Spéciales*, (A.E.E.S., Université de Liège), MM. V. LEJEUNE et A. SCHLAG ont donné l'équation d'un grand cercle, en employant les coordonnées :

$$\rho = BM ; \quad \omega = \text{angle } ABM .$$

Cette équation peut s'écrire (*loc. cit.*, page 17) :

$$\text{tg } \rho = \frac{1}{V \cos \omega + W \sin \omega} . \quad (2)$$

De la considération des triangles sphériques rectangles MRB, MPB, on tire :

$$\sin \gamma = \sin \rho \sin \omega , \quad \sin \alpha = \sin \rho \cos \omega ;$$

l'équation (2) peut s'écrire :

$$\text{tg } \rho = \frac{\sin \rho}{V \sin \alpha + W \sin \gamma} ,$$

ou :

$$V \sin \alpha + W \sin \gamma = \cos \rho ;$$

mais on a :

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \beta ;$$

l'équation d'un grand cercle peut donc s'écrire :

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0 . \quad (3)$$

On en conclurait aisément l'équation du grand cercle passant

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{p^3}{m^3} . \quad (4)$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovals et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

### § 7. — Etude de la courbure.

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante :

$$k = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left\{ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}^2} .$$

44. — Appliquons cette formule à la surface :

$$xyz = p^3 .$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile :

$$k = \frac{3p^6 x^4 y^4 z^4}{p^{12} \left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} = \frac{3}{p^6 \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right\}^2} \quad (1)$$

$$= \frac{3p^6}{\left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} . \quad (2)$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles