

Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

I. — Réponse à une Note de M. Mar. Bedarida

par M. Léon AUBRY.

Dans sa note (*Enseignement mathématique*, 22^{me} année, 1921 et 1922, n^{os} 1-2, pp. 51-52), M. BEDARIDA affirme que les considérations sur lesquelles je me suis basé, ne sont pas justes, mais il ne donne aucun argument décisif contre mes objections; voici quelques explications pour bien montrer que je n'ai pas du tout envisagé la valeur $s = 1$.

Dans le *Journal de Liouville* (Tome 4, 1839, p. 396), DIRICHLET a voulu établir, pour $s > 1$, l'égalité

$$\prod \frac{1}{1 - \omega^{\gamma} \frac{1}{q^s}} = \sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n^s} = L \quad (1)$$

mais, en réalité, sa démonstration, basée sur la convergence de $\sum \frac{1}{h^s}$, n'est valable que pour les valeurs de s qui rendent cette somme convergente, elle n'est donc pas valable, à bien plus forte raison, pour les valeurs de $s \geq 1$ qui rendent $\log. L_0 = \infty$, puisque par construction $L_0 < \sum \frac{1}{h^s}$ et l'on ne peut donc avoir en même temps $\log. L_0 = \infty$ et l'égalité (1) démontrée, comme l'a admis DIRICHLET, (*loc. cit.*, p. 408 et 411).

M. BEDARIDA affirme que DIRICHLET a déduit par des raisonnements rigoureux l'équation de la page 411 (*loc. cit.*) où $s = 1 + \rho$, $\rho > 0$, or il faut remarquer que ρ n'est pas un nombre quelconque, mais nécessairement infiniment petit, puisque la démonstration de DIRICHLET est basée en grande partie sur des raisonnements d'analyse infinitésimale rigoureux seulement pour $s = 1 + \rho$ avec ρ infiniment petit et tendant vers 0; il y a donc là encore une contradiction, puisque ces raisonnements d'analyse ne sont absolument exacts que pour la limite $s = 1$, tandis que pour cette valeur de s , l'égalité (1) n'est pas démontrée par DIRICHLET.

II. — Réponse à la lettre de M. Léon Aubry

par M. Mar. BEDARIDA.

Dans la note ci-dessus qui nous a été obligeamment communiquée par la Rédaction, M. L. Aubry nous dit qu'il n'est pas persuadé de mes observations sur ses objections concernant la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

En supposant $\rho > 0$, Dirichlet arrive à l'égalité (*Journ. de Liouville*, t. 4, 1839, p. 411) :

$$\sum \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \dots$$

$$= \frac{1}{p-1} \left[\log L_{(0)} + \Omega^{-\gamma_m} \log L_{(1)} + \Omega^{-2\gamma_m} \log L_{(2)} + \Omega^{-(p-1)\gamma_m} L_{(p-2)} \right]$$

qui a toujours une valeur déterminée et finie dans l'hypothèse $\rho > 0$.

Dans cette relation, Dirichlet passa à la limite pour $\rho = 0$ ($s = 1$); dans le § II de son Mémoire il a démontré que $\lim_{s=1} \log L_{(0)} = \infty$.

A présent, les considérations pour le passage à la limite pour $s = 1$ ne conduisent pas à devoir considérer l'égalité :

$$\prod \frac{1}{1 - \omega \gamma \frac{1}{q^s}} = \sum \omega \gamma \frac{1}{n^s} = L \quad (1)$$

pour $s = 1$. Dans la démonstration de Dirichlet, on ne demande pas d'examiner (1) pour $s = 1$, mais il y a seulement des considérations à la limite pour $s = 1$ ($\rho = 0$).

M. Aubry ne doit pas oublier le principe fondamental de la théorie des limites fonctionnelles, c'est-à-dire que la limite (quand elle existe) est bien différente de la valeur (s'il y en a une) que prend la fonction lorsqu'on remplace la variable par la valeur pour laquelle on considère la limite.

J'ajouterai encore les observations suivantes, au sujet des réponses publiées dans le fasc. 5-6, p. 69-70, 1922, de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, à propos des remarques de M. Aubry sur la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

Les citations bibliographiques de ces réponses ne font pas comprendre si quelque mathématicien a prouvé que les raisonnements de Dirichlet ne seraient pas rigoureux, mais ils donnent seulement des indications d'auteurs qui ont simplifié la démonstration de Dirichlet et qui ont donné au théorème une plus vaste extension; en outre, on signale la nouvelle démonstration de M. Landau.

Quant au théorème indiqué dans la première réponse, je dis qu'il a été étendu, sans recourir à des considérations d'analyse, aux progressions $mx + 1$, où m est un entier quelconque (KRONECKER, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, p. 440-441).

Gênes, décembre 1922.

A.-M. BEDARIDA.