

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
Autor: Winants, Marcel
Kapitel: § 7. — Etude de la courbure.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515727>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{p^3}{m^3} . \quad (4)$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovals et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

§ 7. — Etude de la courbure.

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante :

$$k = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}^2} .$$

44. — Appliquons cette formule à la surface :

$$xyz = p^3 .$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile :

$$k = \frac{3p^6 x^4 y^4 z^4}{p^{12} \left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} = \frac{3}{p^6 \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right\}^2} \quad (1)$$

$$= \frac{3p^6}{\left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} . \quad (2)$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles

la surface a la même courbure totale. D'après la formule (1), on doit avoir :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{c^2} .$$

Cette équation représente des surfaces algébriques du sixième ordre, à huit nappes, admettant les plans

$$x = \pm c ; \quad y = \pm c ; \quad z = \pm c ;$$

comme plans asymptotes. L'origine est un point quadruple isolé. Toute section faite dans l'une de ces surfaces par un plan parallèle à un plan coordonné, est une krenzcurve.

On obtient un résultat d'apparence plus simple en considérant l'équation (2). Une ligne de courbure totale constante est représentée par les équations :

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = a^4 , \quad xyz = p^3 .$$

On pourrait faire ici la même remarque qu'au n° 41.

47. — Au n° 31, nous avons trouvé la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, tangent à la surface, au point (x, y, z) :

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}} .$$

Il en résulte :

$$d^4 = \frac{81p^{12}}{\{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2\}^2} .$$

En comparant cette formule à la formule (2) du n° 44, on trouve :

$$k = \frac{d^4}{27p^6} .$$

THÉORÈME: Si, en chaque point d'une ligne de courbure totale constante, on mène le plan tangent à la surface, tous ces plans enveloppent une sphère, dont le centre se trouve à l'origine.

Cette propriété est encore compatible avec la symétrie de la surface (41).

(A suivre).