SUR LES SÉRIES ENTIÈRES, DONT LA SOMME EST UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES, DONT LA SOMME EST UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

PAR

G. PÓLYA (Zurich).

---

1. — Outre la formule du binôme on connaît depuis l'époque d'EULER plusieurs exemples de séries simples, dont la somme est une fonction algébrique, par exemple, la série de LAMBERT, servant à la résolution des équations trinômes. Ces divers résultats sont, croyons-nous, contenus comme cas particuliers dans le théorème général suivant:

Soient $\varphi(z)$ et $\Phi(z)$ deux fonctions algébriques régulières autour du point $z = 0$. Posons

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= A_{00} + A_{01} z + A_{02} z^2 + A_{03} z^3 + \ldots \\
\Phi(z)\varphi(z) &= A_{10} + A_{11} z + A_{12} z^2 + A_{13} z^3 + \ldots \\
\Phi(z)\varphi(z)^2 &= A_{20} + A_{21} z + A_{22} z^2 + A_{23} z^3 + \ldots \\
\Phi(z)\varphi(z)^3 &= A_{30} + A_{31} z + A_{32} z^2 + A_{33} z^3 + \ldots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et disposons les termes de ce tableau *régulièrement*, c'est-à-dire de la manière suivante: après avoir choisi un axe des x dirigé de haut en bas et un axe des y dirigé de gauche à droite, convenons d'écrire le terme $A_{kl} z^l$ au point $x = k$, $y = l$. Traçons dans ce tableau une droite quelconque non parallèle à l'axe des x ; *l'ensemble des termes disposés le long de cette droite forme une série entière dont le rayon de convergence est différent de zéro et dont la somme est une fonction algébrique.*

Dans cet énoncé, les fonctions rationnelles sont considérées comme des fonctions algébriques particulières. S'il n'y a qu'un nombre fini de termes le long de la droite en question, l'ensemble de ces termes forme une fonction rationnelle entière; dans ce cas-là, le théorème est trivial. Si la droite est horizontale, parallèle à l'axe des y, le théorème est encore évident, le produit de deux fonctions algébriques étant algébrique. Si la droite est verticale, la série obtenue peut être divergente (c'est pour cela que ce cas a été écarté dans l'énoncé) mais si elle converge, elle représente une fonction rationnelle particulièrement simple.

Il y a encore un cas où le théorème est évident. En posant

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{k}};$$

on a

$$a_l z^l + a_{l+k} z^{l+k} + a_{l+2k} z^{l+2k} + \dots$$
$$= \frac{f(z) + \omega^{-l} f(\omega z) + \omega^{-2l} f(\omega^2 z) + \dots + \omega^{-(k-1)l} f(\omega^{k-1} z)}{k}$$

et cette dernière fonction est algébrique si $f(z)$ l'est. Voilà à quoi se réduit essentiellement le théorème, si $\varphi(z) = az^m$, a étant une constante, m un nombre entier, $m \geqq 0$.

Le tableau le plus simple du genre considéré est le *triangle de Pascal*, que j'écris comme suit:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{1} \\
1 + z \\
1 + \mathbf{2z} + z^2 \\
1 + 3z + 3z^2 + z^3 \\
1 + 4z + \mathbf{6z^2} + 4z^3 + z^4 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

(On a dans ce cas-là $\Phi(z) = 1$, $\varphi(z) = 1 + z$.) Les droites parallèles à la bissectrice des deux axes rectangulaires contiennent des séries entières dont la somme est rationnelle, $= (1 - z)^{-1}$ $(1 - z)^{-2}$, $(1 - z)^{-3}$, ... La droite passant par les trois termes en caractères gras engendre la série

$$1 + 2z + 6z^2 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4.6 \dots 2n} 2^{2n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}.$$

2. — Les points du plan, dont les coordonnées rectangulaires sont des nombres entiers non négatifs, forment un réseau. Nous avons à nous occuper des droites qui passent par une infinité des points de ce réseau, sans être parallèles à un des deux axes. Ces droites ont une équation de la forme

$$ay - bx = q \tag{1}$$

où a, b, q sont des entiers, $a > 0$, $b > 0$. Le plus grand commun diviseur de a et de b doit diviser q ; il peut être supposé, sans restriction, égal à l'unité. Toutes les solutions de (1) en nombres entiers non négatifs peuvent être représentées par une formule

$$x = c + an\,, \qquad y = d + bn\,, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

$n = 0$ donne la «plus petite» solution de ce genre, $x = c$, $y = d$.
Il s'agit donc de la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{c+an,\, d+bn}\, z^{d+bn} = F(z)\,. \tag{2}$$

On a

$$A_{c+an,\, d+bn} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(u)\, \varphi(u)^{c+an}}{u^{d+bn}} \cdot \frac{du}{u}\,. \tag{3}$$

L'intégration est étendue le long d'un contour circulaire $|u| = r$, r étant choisi de manière que l'aire $|u| \leq r$ ne contienne aucun point singulier des branches considérées des fonctions algébriques $\varphi(u)$ et $\Phi(u)$. (Plus tard r sera assujetti à une nouvelle condition.) Soit sur la circonférence $|z| = r$

$$|\varphi(u)| \leqq k\,, \qquad |\Phi(u)| \leqq K\,.$$

On a alors d'après (3)

$$|A_{c+an,\, d+bn}| < K \,.\, k^{c+an} \,.\, r^{-d-bn}\,.$$

ce qui montre que la série (2) converge sûrement dans le cercle $|z| < rk^{-\frac{a}{b}}$.

On a d'après (2) (3)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(u)\, \varphi(u)^c\, z^d}{u^d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi(u)^a z^b}{u^b} \right)^n \cdot \frac{du}{u}$$

la série géométrique étant convergente pour $|z|$ assez petit, d'où l'on tire

$$F(z) = \frac{z^d}{2\pi i} \int \frac{u^{b-d-1} \varphi(u)^c \Phi(u)\, du}{u^b - z^b \varphi(u)^a} . \qquad (4)$$

Considérons les racines multiples u qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fraction à intégrer. Elles satisfont aux deux équations simultanées

$$u^b - z^b \varphi(u)^a = 0 , \qquad b u^{b-1} - a z^b \varphi(u)^{a-1} \varphi'(u) = 0$$

d'où résulte

$$a u \varphi'(u) - b \varphi(u) = 0 . \qquad (5)$$

Si cette dernière équation est identique, on aura $\varphi(u)^\alpha = Cu^b$, où C est une constante. Je laisse de côté ce cas qui peut être traité directement, comme je viens de le faire remarquer.

L'équation (5) a un nombre fini de racines.

On peut choisir le chemin des intégrations (3) et (4) c'est-à-dire le contour circulaire $|u| = r$ de manière qu'il ne contienne qu'une racine ou qu'il n'en contienne aucune, suivant que le point $u = 0$ est ou n'est pas racine de (5). Le rayon r étant choisi définitivement, je prends z assez petit en valeur absolue pour qu'on ait sur le contour $|u| = r$

$$|u|^b > |z|^a |\varphi(u)|^b .$$

D'après le théorème de Rouché, l'intérieur du contour $|u| = r$ contient exactement b racines de l'équation $u^b - z^b \varphi(u)^a = 0$; $u = 0$ peut être une racine multiple, mais les autres racines

$$u_1 , u_2 , u_3 , \ldots u_\beta$$

contenues à l'intérieur du contour $|u| = r$ sont sûrement simples d'après le choix de r. On a $\beta \leq b$.

L'intégrale (4) étant égale à la somme des résidus relatifs aux pôles à l'intérieur de la circonférence $|u| = r$ on obtient d'après la discussion précédente

$$F(z) = R(z) + \sum_{\nu=1}^{\beta} \frac{z^d u_\nu^{b-d-1} \varphi(u_\nu)^c \Phi(u_\nu)}{b u_\nu^{b-1} - a z^b \varphi(u_\nu)^{b-1} \varphi'(u_\nu)} . \qquad (6)$$

R(z) est le résidu correspondant au point $u = 0$.

R(z) est une fonction rationnelle, qui peut se réduire à 0. On sait que les fonctions algébriques d'une fonction algébrique sont algébriques, ainsi que la dérivée d'une fonction algébrique ; donc $u_1, u_2, \dots u_\beta$ sont algébriques, chaque terme de la somme dans l'équation (6) est algébrique et F(z) est aussi algébrique, *c. q. f. d.*

3. — Comme premier exemple, posons $\Phi(z) = 1$, $\varphi(z) = 1 + z + z^2$ et considérons avec Euler [1] le tableau

$$\begin{array}{l} \mathbf{1} \\ 1 + \mathbf{z} + z^2 \\ 1 + 2z + \mathbf{3z^2} + 2z^3 + z^4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

On trouve la somme de la série qui commence par les termes en caractères gras d'après la méthode exposée.

$$1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + \dots = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{du}{u - z(1 + u + u^2)} = \frac{1}{1 - z(1 + 2u_1)}$$

u_1 désignant la racine de l'équation $u - z\,(1 + u + u^2) = 0$ qui se réduit à zéro pour $z = 0$. On a donc

$$u_1 = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z},$$

$$1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + \dots = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z - 3z^2}},$$

résultat dû à Euler, *loc. cit.* [1].

Je considère un second exemple. Je désigne par
α, β deux nombres rationnels, par
a, b deux nombres entiers non négatifs.

Je pose $\Phi(z) = (1 + z)^\alpha$, $\varphi(z) = (1 + z)^\beta$ et je considère la droite $y = a + bx$. J'obtiens la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{a + bn} z^{a+bn}$$

[1] L. Euler. *Opuscula analytica,* Tomus I (Petropoli, 1783), p. 48-62.

dont la somme est une fonction algébrique de z ainsi que la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{a + bn} z^n .$$

D'après une remarque faite auparavant, l'évaluation de cette dernière série se ramène facilement à l'évaluation de celle-ci: [1]

$$\sum_{=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{n} z^n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1+u)^\alpha du}{u - z(1+u)^\beta} = \frac{v_1^\alpha}{1 - \beta z v_1^{\beta - 1}} ; \qquad (7)$$

où l'on désigne par v_1 la racine de l'équation trinôme

$$z v^\beta - v + 1 = 0 \qquad (8)$$

qui se réduit à l'unité pour $z = 0$ $(1 + u = v)$. La formule (7) contient un grand nombre de cas particuliers intéressants. La série (7) reste inchangée si l'on change simultanément

$$\alpha \text{ en } -1-\alpha , \quad \beta \text{ en } 1 - \beta , \quad z \text{ en } -z ;$$

elle se réduit à la formule du binôme pour $\beta = 0$ et $\beta = 1$; elle a une somme très simple, si $\beta = 2$ ou $\beta = 1 - 2 = -1$. On obtient d'après (7) en résolvant l'équation trinôme (8) qui devient quadratique pour $\beta = 2$

$$1 + \binom{\alpha + 2}{1} z + \binom{\alpha + 4}{2} z^2 + \binom{\alpha + 6}{3} z^3 + \dots$$

$$= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{1 - 4z}} . \qquad (9)$$

Cette formule était aussi connue d'EULER [2] qui donne à la

---

[1] M. HURWITZ, dans ses exercices, a posé le problème suivant : en admettant que β est rationnel, démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta n}{n} z^n$$

représente une fonction algébrique. C'est ce problème qui, conjointement avec le problème d'EULER précité, m'a suggéré le théorème général que je viens de démontrer.

[2] L. EULER. *Opera postuma*, Tom. I (Petropoli, 1862), p. 299-314.

somme la forme équivalente

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4z}}\right)^{-\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-4z}}.$$

On a d'après (7)

$$\frac{v_1}{1-\beta z v_1^{\beta-1}} = \sum_0^\infty \binom{1+\beta n}{n} z^n = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1+\beta n}{n}\binom{\beta n}{n-1} z^n ,$$

$$\frac{\beta z v_1^\beta}{1-\beta z v_1^{\beta-1}} = \beta z \sum_0^\infty \binom{\beta+\beta n}{n} z^n = \sum_{n=1}^\infty \beta\binom{\beta n}{n-1} z^n .$$

On obtient par soustraction

$$v_1 = 1 + \sum_{n=1}^\infty \binom{\beta n}{n-1}\frac{z^n}{n} ,$$

ce qui est la série bien connue de LAMBERT [1] écrite sous une forme simplifiée; elle donne la solution de l'équation trinôme (8) qui se réduit à 1 pour $z = 0$.

En mettant $w = v^\alpha$ on obtient par un calcul analogue la solution w_1 de l'équation trinôme plus générale

$$z w^{\frac{\beta}{\alpha}} - w^{\frac{1}{\alpha}} + 1 = 0$$

$$w_1 = 1 + \alpha \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}\binom{\alpha+\beta n-1}{n-1}$$

w_1 se réduisant à l'unité pour $z = 0$. D'autre part, en changeant simultanément dans les formules (7) et (8)

$$v \text{ en } 1+\frac{v}{\beta}, \qquad z \text{ en } \frac{z}{\beta}$$

on obtient pour $\beta = \infty$ les séries simples

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n^n z^n}{n!} = \frac{1}{1-v_1}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{n-1} z^n}{n!} = v_1 ,$$

[1] Voir p. ex. *Encyklopædie d. mathem. Wiss.*, II, B. 1 (OSGOOD), p. 44.

v_1 désignant la solution de l'équation transcendente

$$ze^v - v = 0$$

qui se réduit à 0 pour $z = 0$ et à 1 pour $z = e^{-1}$.

4. — J'expose deux problèmes caractéristiques, où les calculs précédents peuvent être utilisés.

En jetant $2n$ dés à la fois, on peut obtenir différentes sommes de points de $2n$ à $12n$. Le cas le plus probable est celui de $7\,n$ points. Désignons par A_n le nombre des combinaisons où se produit cet événement, de manière que $A_n\,6^{-2n}$ soit la probabilité d'amener $7n$ points avec $2n$ dés. Je considère la série

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \qquad (10)$$

Comme on sait A_n est le coefficient de u^{7n} dans le développement de la puissance $(u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6)^{2n}$.

On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int \frac{(u + u^2 + \dots + u^6)^{2n}}{u^{7n}} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u^4\,du}{u^5 - z(1 + u + \dots + u^5)^2}$$

d'où l'on conclut par le raisonnement précédent que la série envisagée (10) représente une fonction *algébrique*.

Euler a fait connaître la remarquable transformation de séries

$$\frac{1}{1+t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{1+t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Delta^n a_0 \qquad (11)$$

qui porte son nom et qui joue un rôle important dans certaines recherches modernes sur les séries entières [1]. On désigne comme d'habitude par $\Delta^n a_r$ l'expression

$$\Delta^n a_r = a_{n+r} - \binom{n}{1} a_{n+r-1} + \binom{n}{1} a_{n+r-2} - \dots + (\ \ 1)^n a_r\,.$$

Les quantités a_0, Δa_0, $\Delta^2 a_0$, ... interviennent dans la solution de ce problème: trouver un polynôme de degré $\leq n$, prenant des valeurs données $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ aux points successifs $z =$

[1] Voir p. ex. Pringsheim. *Ueber einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation.* Sitzungsber. München, 1912, p. 11-92.

0, 1, 2, ... n. C'est ce que j'appellerai le problème de l'interpolation *unilatérale* ou *Newtonienne*. Comme interpolation *bilatérale* ou *Laplacienne* [1] je désignerai le problème suivant: chercher un polynôme de degré $\leq 2n$ prenant des valeurs données aux $2n+1$ points

$$z = -n, \ -n+1, \ldots -1, \ 0, \ +1, \ldots n-1, \ n .$$

Je me suis proposé de chercher une transformation de séries qui ait le même rapport à l'interpolation bilatérale que la transformation d'Euler à l'interpolation unilatérale. J'ai trouvé qu'il faut distinguer deux cas; le cas pair et le cas impair. Bref, je suis arrivé aux formules suivantes:

en supposant $a_{-n} = a_n$ (12)

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n \Delta^{2n} a_{-n}$$

en supposant $a_{-n} = -a_n$ (12′)

$$\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\left(\Delta^{2n} a_{-n+1} - \Delta^{2n} a_{-n-1}\right)$$

Je démontre la première de ces formules. On a, k désignant un entier:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right)^k = \frac{t^k}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{-2t}\right)^{2k}$$

$$= t^k \sum_{l=0}^{\infty}\binom{2k+2l}{l}(-t)^l$$

d'après la formule (9). En substituant cette expression dans la formule (12) on obtient

$$\frac{a_0}{2\sqrt{1+4t}} + \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{-2t}\right)^{2k}$$

$$= \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(-1)^n t^n + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k(-1)^l\binom{2k+2l}{l} t^{k+l}$$

$$= \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(-1)^n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{2n}{l} a_{n-l} . \qquad (13)$$

---

[1] LAPLACE. *Théorie analytique des probabilités,* chap. I, n° 4.

J'ai introduit le nouvel indice de sommation n par l'équation $n = k + l$. Remarquons qu'en vertu de la supposition $a_{-m} = a_m$, on a

$$(-1)^l \binom{2n}{l} a_{n-l} = (-1)^{2n-l} \binom{2n}{2n-l} a_{n-(2n-l)} .$$

Donc la dernière ligne de la formule (13) peut être écrite comme suit:

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{l} a_{n-l} ,$$

ce qui démontre la formule proposée (12).

J'ai démontré autrefois [1] que la plus petite fonction entière *transcendante* qui prend des valeurs entières pour $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$ est la fonction simple 2^z et que la plus petite fonction entière transcendante qui prend des valeurs entières pour toutes les valeurs entières

$$\ldots -n, \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots +n, \ldots$$

de z est la fonction impaire

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^z - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-z} \right\} .$$

Le premier et le second de ces théorèmes ont le même rapport entre eux que l'interpolation unilatérale et bilatérale ou bien que la transformation d'Euler et les nouvelles formules (12) et (12').

[1] G. Pólya. *Ueber ganze ganzwertige Funktionen*, Rendiconti, Palermo, T. 40 (1915, 2), p. 1-16. — Göttinger Nachrichten, 1920, p. 1-10.