IV. — Fonctions additives d'ensembles abstraits.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

ensembles de la famille $\mathcal{H}_c$ en « classes » d'ensembles dont la construction à partir de $\mathcal{H}$ est de plus en plus compliquée.

Applications. — On conçoit bien que les généralités précédentes ont trouvé leur origine dans les travaux concernant les familles additives d'ensembles linéaires dont on trouvera l'exposé récent le plus complet dans l'ouvrage de M. de la VALLÉE-POUSSIN : « Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles ».

Même dans ce cas l'auteur croit avoir élargi le point de vue ordinaire, par exemple en ne se restreignant pas au cas où la famille initiale donnée $\mathcal{H}$ est formée d'intervalles.

Mais sa théorie fournit aussi des applications intéressantes dans le cas où les éléments considérés sont des points de l'espace à une infinité de dimensions. L'auteur développera ailleurs ces applications ainsi que l'application à ce cas de la théorie des fonctions additives d'ensembles abstraits.

IV. — Fonctions additives d'ensembles abstraits.

Définitions. — Si une correspondance est établie qui fait correspondre à tout ensemble E d'une certaine famille $\mathcal{F}$, un nombre déterminé $f(E)$, cette correspondance définit une *fonction d'ensemble*, uniforme sur la famille $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2 deux ensembles disjoints, c'est-à-dire sans éléments communs ; si l'on a

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$$

toutes les fois que E_1, E_2, $E_1 + E_2$ appartiennent à $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens restreint* sur $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2, ... E_n, ... une suite infinie dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux ; si l'on a

$$f(E_1 + E_2 + \dots) = f(E_1) + f(E_2) + \dots$$

toutes les fois que les ensembles E_1, E_2, ... et $E_1 + E_2 + \dots$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens complet* (ou plus simplement additive) sur $\mathcal{F}$.

On conçoit qu'il sera généralement plus facile et plus simple d'étudier une fonction additive au sens restreint (complet) sur une famille d'ensembles additive au sens restreint (complet).

C'est en fait surtout cette remarque qui a provoqué l'introduction de ces familles particulières d'ensembles.

Remarque: M. de la VALLÉE POUSSIN a pu écrire, d'ailleurs très justement, que le progrès essentiel introduit par la théorie de la mesure « est d'avoir réalisé l'additivité au sens complet ». Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que si l'intuition de M. BOREL n'avait pas soudainement introduit cette notion, un développement régulier de la théorie des ensembles et du calcul fonctionnel aurait dû, plus lentement mais sûrement toutefois, y conduire. Qu'est-ce en effet qu'une fonction d'ensemble additive au sens complet ? C'est une fonction additive au sens restreint *et continue*, (et réciproquement), si nous appelons, comme il convient, fonction d'ensembles, continue sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles, une fonction telle que $f(E_n)$ converge vers $f(E)$ si la suite convergente d'ensembles E_n de $\mathcal{F}$ a pour ensemble limite l'ensemble E de $\mathcal{F}$.

Rappel de propriétés connues des fonctions additives d'ensembles. — Nous n'étudierons ici que le cas des fonctions d'ensembles additives au sens complet sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles additive au sens complet.

I. Une fonction f additive sur une famille additive $\mathcal{F}$ est bornée sur $\mathcal{F}$. Il en résulte que si $E = E_1 + \ldots + E_n$ est une décomposition variable d'un ensemble E de $\mathcal{F}$ en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{F}$, la somme

$$|f(E_1)| + \cdots + |f(E_n)|$$

a une borne supérieure finie qu'on peut appeler la variation totale de f sur E relativement à la famille $\mathcal{F}$ et qu'on peut désigner quand il s'agit toujours de la même famille $\mathcal{F}$ par la notation (due à J. RADON) $\int_E |df|$.

II. La variation totale d'une fonction f additive sur $\mathcal{F}$ est aussi une fonction d'ensemble additive sur $\mathcal{F}$.

III. On peut représenter à la fois une fonction additive f et sa variation totale au moyen de deux fonctions additives non négatives φ, ψ suivant les formules

$$f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$$
$$\int_E |df| = \varphi(E) + \psi(E)$$

On obtient ainsi la représentation canonique de f.

IV. La représentation la plus générale d'une fonction d'ensembles additive f comme différence de deux fonctions additives non négatives $f(E) = \varphi_1(E) - \psi_1(E)$ s'obtient en ajoutant une fonction additive non négative, pour former φ_1, ψ_1 aux fonctions φ, ψ de la représentation canonique. En sorte que celles-ci sont les plus petites fonctions φ_1, ψ_1, possibles.

Définitions nouvelles. — Relativement à une fonction d'ensembles additive déterminée, f, et à une famille d'ensembles additive déterminée, $\mathcal{F}$,

un ensemble E est *presque nul* s'il appartient à $\mathcal{F}$ et si la variation totale de f sur E est nulle;

deux ensembles E, F sont *presque identiques*, s'ils ne diffèrent de leur ensemble commun que par des ensembles presque nuls;

deux ensembles E, F sont *presque disjoints*, si leur ensemble commun est presque nul.

Décomposition d'une fonction additive en partie régulière et en partie singulière.

Singularité. — Un ensemble H appartenant à la famille F est une singularité de la fonction f si tout sous-ensemble de H qui n'est pas presque nul est presque identique à H.

La variation totale de f sur une de ses singularités H est égale à $|f(H)|$. Nous appellerons $f(H)$ le saut de f sur H et $|f(H)|$ son saut absolu.

Deux singularités de f sont presque disjointes ou presque identiques.

L'ensemble des singularités presque disjointes d'une même fonction additive est dénombrable. Et même, plus précisément, si une fonction additive d'ensembles a au moins une singularité il existe une suite dénombrable S_1, S_2, ... de singularités disjointes deux à deux, telle que toute singularité de f soit presque identique à l'une de celles-ci.

Appelons *ensemble singulier* l'ensemble $S = S_1 + S_2 + \ldots$ ou tout ensemble T appartenant à $\mathcal{F}$ et presque identique à S.

Fonction des sauts. Partie régulière. — On peut décomposer une fonction $f(E)$ additive sur une famille d'ensembles additive $\mathcal{F}$ en deux parties $f(E) = s(E) + r(E)$, où $s(E)$, $r(E)$ sont aussi, comme f, deux fonctions d'ensembles additives sur F, mais où $r(\mathrm{E})$, la *partie régulière* de f, *n'a plus de singularités* et où au contraire on peut prendre *tout ensemble singulier de f* comme ensemble singulier de $s(\mathrm{E})$, *la fonction des sauts* de f, *avec les mêmes sauts* que pour f, sur chaque singularité de f, la fonction des sauts étant *nulle en dehors de tout ensemble singulier* de f.

Il suffit pour cela de poser sur tout ensemble E de $\mathfrak{F}$

$$s(\mathrm{E}) = f(\mathrm{E}\,.\,\mathrm{T})\ ,\quad r(\mathrm{E}) = f(\mathrm{E} - \mathrm{T})$$

T désignant l'un quelconque des ensembles singuliers de f.

Remarquons que si E est un ensemble quelconque de $\mathfrak{F}$ la partie commune à E et à une singularité S_i de f est, soit presque identique à S_i, soit presque nulle. En appelant $c_i = f(\mathrm{S}_i)$, le saut de f sur S_i, on a donc $f(\mathrm{E}\,.\,\mathrm{S}_i) = c_i$ ou égal à zéro. Donc la *fonction des sauts de f peut s'exprimer sous la forme*

$$r(\mathrm{E}) = c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_n} + \cdots$$

si $\mathrm{S}_{i_1}, \mathrm{S}_{i_2} \ldots$ sont celles des singularités de f qui sont « presque contenues » dans E , c'est-à-dire qui ne sont pas presque disjointes de E.

D'autre part en ce qui concerne la partie régulière de f, on observera les propriétés suivantes de toute fonction additive g sans singularité : la borne inférieure de la variation totale de g sur un sous-ensemble e non presque nul (et appartenant à $\mathfrak{F}$) d'un ensemble fixe E est zéro ; et plus généralement si on fait varier e dans E, la variation totale de g sur e, passe par toutes les valeurs intermédiaires entre son maximum qui est $\int_{\mathrm{E}} |dg|$ et son minimum qui est nul. On démontre ce dernier résultat en prouvant qu'on peut décomposer tout ensemble E de $\mathfrak{F}$ en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à $\mathfrak{F}$ et sur chacun desquels la variation totale de f est inférieure à un même nombre positif donné d'avance arbitrairement.

Décomposition de la variation totale. Il y a lieu de remarquer que si l'on appelle variation positive et variation négative, les deux fonctions non négatives φ, ψ dont la différence constitue la représentation canonique de f, la décomposition de f se reflète exactement sur ses variations totale, positive et négative. On a d'abord pour fonctions respectives des sauts de $\varphi_{(E)}$, $\psi_{(E)}$, $\int_E |df|$, les fonctions

$$\varphi(E\,.\,T)\,,\ \psi(E\,.\,T)\,,\ \int_{E.T}|df|$$

et pour parties régulières

$$\varphi(E-T)\,,\ \psi(E-T)\,,\ \int_{E-T}|df|$$

De plus puisque

$$\int_{S_i}|df| = |f(S_i)|\,, \qquad \text{ou} \qquad \varphi(S_i)+\psi(S_i) = |\varphi(S_i)-\psi(S_i)|$$

d'où

$$\psi(S_i)=0 \quad \text{et} \quad f(S_i)=\varphi(S_i)\,, \qquad \text{ou}$$
$$\varphi(S_i)=0 \quad \text{et} \quad f(S_i)=-\psi(S_i)$$

l'ensemble $S = S_1 + S_2 + \ldots$ de singularités de f qui sont disjointes est la somme d'un ensemble singulier S' de φ et d'un ensemble singulier S'' de ψ, ces deux ensembles étant disjoints et composés le premier S' de toutes les singularités S'_i de S où les sauts de f sont positifs et le second S'' de toutes les singularités S''_j de S où les sauts de f sont négatifs, les sauts de φ sur S'' et ceux de ψ sur S' étant en outre nuls.

De sorte qu'on peut écrire:

$$s(E)=\varphi(E\,.\,S')-\psi(E\,.\,S'')\ ; \qquad r(E)=\varphi(E-S')-\psi(E-S'')$$
$$\sigma(E)=\varphi(E\,.\,S')+\psi(E\,.\,S'')\ ; \qquad \rho(E)=\varphi(E-S')+\psi(E-S'')$$

S', S'' étant deux ensembles disjoints fixes, indépendants de E, σ et ρ étant la fonction des sauts et la partie régulière de $\int_E |df|$.

Remarque: I. Les définitions se simplifieraient et certaines précautions de langage pourraient être évitées dans ce qui précède si l'auteur s'était borné à considérer le cas où la famille $\mathcal{F}$ est *complète* relativement à f, ou ce qui revient au même le cas où l'on aurait « prolongé analytiquement » la fonction f. C'est à quoi on arrive, en gros, en considérant f comme nul sur toute partie n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ d'un ensemble presque nul, comme l'auteur l'a expliqué dans un article du *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 43, 1915, page 16.

II. L'auteur traitera ailleurs de la décomposition de la partie régulière elle-même, en deux parties analogues à celles qu'il avait signalées au Congrès des Sociétés Savantes de 1913.

III. Les exposés précédents ont été donnés sans démonstrations, celles-ci s'obtenant assez facilement quand on se reporte aux exposés avec démonstrations (dus surtout à MM. LEBESGUE et de la VALLÉE-POUSSIN) concernant le cas particulier où les familles considérées sont des familles composées d'ensembles linéaires et contenant les intervalles linéaires. D'ailleurs les démonstrations dans le cas général traité ici ont été données au cours des leçons faites par l'auteur à l'Université de Strasbourg dans le premier semestre 1921-22.

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

PAR

P. APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

I. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de mathématiques* [1], se trouvent définis les foyers rationnels d'une courbe algébrique C

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

comme des *points tels que la distance d'un point quelconque* M *de la courbe* C *au point foyer soit exprimable par une fonction rationnelle* R *des coordonnées de* M.

Cette notion peut d'ailleurs s'étendre aux surfaces.

A la suite de cet article, M. E. TURRIÈRE, aujourd'hui profes-

[1] Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4], t. XVIII, novembre 1918, p. 401-402.