SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

Autor(en): **Appell, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515732

l'auteur l'a expliqué dans un article du *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 43, 1915, page 16.

II. L'auteur traitera ailleurs de la décomposition de la partie régulière elle-même, en deux parties analogues à celles qu'il avait signalées au Congrès des Sociétés Savantes de 1913.

III. Les exposés précédents ont été donnés sans démonstrations, celles-ci s'obtenant assez facilement quand on se reporte aux exposés avec démonstrations (dus surtout à MM. Lebesgue et de la Vallée-Poussin) concernant le cas particulier où les familles considérées sont des familles composées d'ensembles linéaires et contenant les intervalles linéaires. D'ailleurs les démonstrations dans le cas général traité ici ont été données au cours des leçons faites par l'auteur à l'Université de Strasbourg dans le premier semestre 1921-22.

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

PAR

P. Appell, Membre de l'Institut (Paris).

I. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de mathématiques* [1], se trouvent définis les foyers rationnels d'une courbe algébrique C

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

comme des *points tels que la distance d'un point quelconque* M *de la courbe* C *au point foyer soit exprimable par une fonction rationnelle* R *des coordonnées de* M.

Cette notion peut d'ailleurs s'étendre aux surfaces.

A la suite de cet article, M. E. Turrière, aujourd'hui profes-

[1] Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4], t. XVIII, novembre 1918, p. 401-402.

seur à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier, m'a écrit pour me donner sur la question [1] d'intéressants renseignements historiques et bibliographiques, qu'il a ensuite résumés dans une note publiée dans l'*Enseignement mathématique*.

II. Inversement, si on se donne le foyer rationnel et la fonction R de x et y on peut écrire immédiatement l'équation de la courbe C; mais cette équation peut ne pas être irréductible. De plus, on peut obtenir la même courbe C avec un même foyer et une infinité de déterminations de la fonction rationnelle R; seulement les équations obtenues ne sont pas irréductibles; elles représentent la courbe C et d'autres courbes. C'est ce qui résulte de la suite. On voit dès lors pourquoi il importe, dans chaque cas, de limiter les degrés du numérateur et du dénominateur de R. Notamment, pour les coniques, on voit pourquoi il faut réduire R à une fonction linéaire de x et y.

III. D'après la définition, si (α, β) est un foyer rationnel de la courbe (1) en coordonnées rectangulaires, on aura, pour tout point M (x, y) de la courbe (1),

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \mathrm{R}^2(x, y) , \qquad (2)$$

R (x, y) désignant une fonction rationnelle de x et y. Mais il peut arriver que l'équation (2) étant vérifiée par les coordonnées de tout point de (1), représente la courbe (1) et d'autres courbes.

Par exemple, si l'équation (2) est vérifiée par les coordonnées x et y de tout point de la courbe C, et si elle est irréductible, on a aussi pour tout point de C l'équation analogue

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left[\mathrm{R} + \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \mathrm{R}^2}{\lambda}\right]^2 \qquad (3)$$

λ étant une fonction rationnelle quelconque de x et y, assujettie à ne pas contenir au numérateur le facteur

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \mathrm{R}^2 .$$

Cette équation (3) développée s'écrit

$$\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \mathrm{R}^2\right]\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (\mathrm{R}-\lambda)^2\right] = 0 . \qquad (4)$$

[1] Voir l'*Enseignement mathématique*, t. XX, 1919, p. 433-436.

Elle représente donc la courbe C avec une autre courbe Γ dépendant de λ et ayant le même point (α, β) pour foyer rationnel; seulement pour Γ la fonction rationnelle $R(x, y)$ est remplacée par une autre fonction rationnelle quelconque $R - \lambda$. Le même point (α, β) est donc, d'une infinité de façons, foyer rationnel de C. Si r désigne la distance d'un point $M(x, y)$ au foyer (α, β), et si on a, pour tout point de C

$$r = R(x, y)$$

on a aussi, pour tout point M de C,

$$r = R + \frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2}{\lambda};$$

résultat évident; mais la nouvelle équation n'est pas irréductible.

Je n'insiste pas sur l'application aux coniques qui est immédiate. Par exemple si l'équation d'une ellipse est

$$(x - c)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2;$$

on a aussi, pour tout point de la courbe,

$$(x - c)^2 + y^2 = \left[\frac{c}{a}x - a + \frac{(x - c)^2 + y^2 - \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2}{\lambda}\right]^2. \quad (6)$$

Si on suppose λ *constant*, cette dernière équation représente une courbe du quatrième ordre, composée de l'ellipse donnée et d'une deuxième ellipse

$$(x - c)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x - a - \lambda\right)^2.$$

Le même traitement appliqué à l'équation (6) donnera les deux coniques et une quadrique, etc...

Cas des quadriques. — Je demande la permission d'attirer l'attention sur le sujet suivant: « *Peut-il exister, pour des quadriques non de révolution, des foyers rationnels* (α, β, γ) ? »

En d'autres termes, peut-on avoir, pour tout point $M(x, y, z)$ d'une quadrique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \quad (Q)$$

ou

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - z = 0 ,$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \left[\frac{f_{n+1}(x, y, z)}{f_n(x, y, z)}\right]^2$$

f_k étant un polynôme en x, y, z de degré k.

Algébriquement, cela revient, pour Q par exemple, à déterminer α, β, γ et les

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$$

coefficients des deux polynômes f_n et f_{n+1}, de façon que l'on ait l'identité

$$\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right] f_n^2 - f_{n+1}^2 \equiv \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1\right) f_{2n}$$

où f_{2n} est un polynôme de degré $2n$ avec

$$\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$$

coefficients. L'identification des deux polynômes de degrés $2n+2$, qui sont dans les deux membres, donne

$$\frac{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}{6}$$

équations. En écrivant que le nombre des coefficients à déterminer est supérieur au nombre des équations, on a

$$3 + \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6} + \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$$
$$> \frac{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}{6} ,$$

$$-3(n+1)(n+2)(2n+5) + 2(n+1)(2n+1)(2n+3) + 18 > 0$$

ou, en faisant $n+1 = \nu$

$$2\nu^3 - 15\nu^2 - 11\nu + 18 > 0$$

inégalité vérifiée pour $\nu = 9$, $n = 8$.