Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES IDENTITÉS GÉOMÉTRIQUES ET LEUR TRADUCTION ALGÉBRIQUE

Autor: Delens, P.-C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515735

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES IDENTITÉS GÉOMÉTRIQUES ET LEUR TRADUCTION ALGÉBRIQUE

PAR

P.-C. DELENS (Le Hâvre).

Je me propose ici de montrer les avantages des algèbres géométriques comme intermédiaires entre le raisonnement direct et le calcul analytique. Certaines de ces méthodes s'appliquent particulièrement à l'étude des systèmes articulés plans et gauches et ont déjà été employées avec succès dans ce sens. Je reprends une question traitée par LAISANT et M. FONTENÉ dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (années 1899, 1917), tant par le calcul des quaternions que par la géométrie, et dans le but de rapprocher les deux méthodes. Il s'agit de l'extension au tétraèdre du théorème de BELLAVITIS sur le quadrangle plan.

Soit un tétraèdre *abcd*; en employant le quaternion comme bi-radiale [1], je forme le bi-rapport:

$$(abcd) = \frac{\dfrac{ca}{cb}}{\dfrac{da}{db}} = \left(\frac{ca}{cb}\right)\left(\frac{da}{db}\right)^{-1} = ca\,.\,cb^{-1}.\,db\,.\,da^{-1}\ ,$$

les facteurs étant ordonnés. (*ca*, etc. désignant des vecteurs, et même des vecteurs quaternions de Hamilton dans le dernier membre de l'égalité.)

Soit maintenant *efg* une section anti-parallèle de *bcd* par rapport à *a* sur le tétraèdre; sur la face *abc*, les vecteurs *ef* et

---

[1] Cf. G. KŒNIGS. *Cinématique*, p. 464.
R. LEVEUGLE. *Calcul géométrique*, p. 107.

cb sont anti-parallèles et on obtient, sur simple inspection de la figure, l'égalité entre quaternions:

$$\frac{ca}{cb} = \mathrm{K}\frac{ea}{ef} \qquad (\mathrm{K} = \text{conjugué de})$$

De même sur la face abd:

$$\frac{da}{db} = \mathrm{K}\frac{ea}{eg}$$

donc:

$$(abcd) = \mathrm{K}\frac{eg}{ef} .$$

Evaluons de même le bi-rapport $(acbd)$:

$$(acbd) = \mathrm{K}\frac{gf}{ef} .$$

Mais les vecteurs eg, gf, fe forment un contour triangulaire, donc:

$$eg + gf + fe = 0 \qquad (1)$$

et par suite:

$$\mathrm{K}\frac{eg}{ef} + \mathrm{K}\frac{gf}{ef} = \mathrm{K}\frac{ef}{ef} = 1 .$$

Il en résulte que dans le calcul des quaternions comme dans le calcul algébrique usuel, on conserve l'identité:

$$(abcd) + (acbd) = 1 . \qquad (2)$$

C'est cette identité qui, rapprochée de (1), traduit le théorème de Bellavitis pour le tétraèdre. Avant d'en tirer quelques conséquences, ajoutons quelques mots sur les propriétés du bi-rapport $(abcd)$. Une telle expression est un quaternion, soit λ, défini de manière unique par son module, son angle d'ouverture et son axe. Or il est facile d'exprimer en fonction de λ les expressions:

$$(abcd) = \lambda , \qquad (abdc) = \frac{1}{\lambda} , \qquad (acbd) = 1 - \lambda ,$$

$$(acdb) = \frac{1}{1-\lambda} , \qquad (adcb) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} , \qquad (adbc) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

qui représentent toutes les quaternions co-axiaux, et dont l'interprétation est immédiate dans le triangle *efg*.

Si on évalue au contraire les expressions:

$$(badc) = \mu \qquad (cdab) = \nu \qquad (dcba) = \rho$$

on trouve leur représentation appropriée dans les triangles sections du tétraèdre par les plans anti-parallèles aux faces *cda*, *dab*, *abc*, par rapport aux sommets opposés. Ces quaternions ont du reste même module et même ouverture que λ et de chacun d'eux on déduit, comme précédemment, cinq autres quaternions co-axiaux [1]. En ce qui concerne l'invariance de la forme du triangle représentatif d'un tétraèdre par rapport au groupe des inversions, cela résulte de la constance du module de λ (ou μ, ν, ρ).

En définitive, on a obtenu 24 bi-rapports vectoriels, formant 4 groupes de 6 éléments, groupes se correspondant par l'échange de λ en μ, ν ou ρ. Les propriétés usuelles des rapports anharmoniques ne sont donc pas toutes conservées pour ces bi-rapports, mais celles qui subsistent traduisent des analogies entre ensembles de 4 points de la droite, du plan, ou de l'espace.

On aurait du reste pu envisager d'autre manière l'extension du rapport anharmonique, par exemple considérer $\frac{ca.db}{cb.da} = ca.db.cb^{-1}.da^{-1}$, et établir les relations entre ces expressions et les précédentes.

A noter encore que le quaternion $\lambda = (abcd)$ peut servir à fixer dans l'espace la position d'un point *d* par rapport à un triangle de référence *abc*.

Revenons à l'étude de la relation (2):

$$(abcd) + (acbd) = 1 \tag{2}$$

ou:

$$ca \,.\, cb^{-1} \,.\, db \,.\, da^{-1} + ba \,.\, bc^{-1} \,.\, dc \,.\, da^{-1} = 1 \;.$$

Si le tétraèdre est aplati suivant un quadrangle sur un plan, la démonstration donnée reste valable; mais entre quaternions

[1] L'étude du mécanisme de M. Bennett (isogram) (Cf. R. Brigard. *Cinématique et Mécanismes*, p, 159) se base directement sur ces remarques.

co-axiaux (ou opérateurs complexes), la commutativité de la multiplication permet d'écrire l'équation précédente sous la forme:

$$ab \,.\, cd + ac \,.\, db + ad \,.\, bc = 0 \,. \qquad (3)$$

Ce n'est cependant pas sous cette forme (3), mais sous la forme (2) qu'on peut généraliser le théorème de Bellavitis.

La relation (3), comme l'a rappelé M. Fontené, est une identité algébrique entre vecteurs, à savoir:

$$x(y - z) + y(z - x) + z(x - y) = 0$$

dès qu'on emploie entre les vecteurs une multiplication distributive et commutative.

Or soit pq le produit de deux éléments — ici des vecteurs — dans une telle multiplication. Il résulte de l'œuvre de Grassmann qu'un tel produit peut se ramener à une fonction linéaire et homogène du produit « algébrique » (pq) des mêmes éléments. L'opération de la division généralisée permet aussi de substituer à ces produits des *équivalences algébriques* suivant un module convenable. Ainsi Grassmann a défini dans le plan le produit « complexe » de deux vecteurs, qui se peut traiter comme une équivalence algébrique suivant le module $(u^2) + (v^2)$, u et v étant deux vecteurs unitaires rectangulaires (de même que le produit des nombres complexes est une équivalence suivant le module $1 + i^2$).

On confond trop souvent ce produit complexe des vecteurs du plan avec le produit des nombres complexes, qui lui est seulement isomorphe; l'exemple du théorème de Bellavitis va encore montrer la différence des méthodes.

Deux produits complexes de vecteurs d'un plan, pq et $p'q'$, étant égaux quand leurs produits algébriques (pq) et $(p'q')$ sont congrus suivant le module $(u^2) + (v^2)$, on voit que l'égalité:

$$pq = p'q'$$

signifie:

1° les produits des modules des vecteurs p, q et p', q' sont égaux

2° les couples de vecteurs p, q et p', q' ont même direction de bissectrice intérieure, même direction de bissectrice extérieure.

Dans le produit complexe ainsi défini, la multiplication est commutative, le produit ne s'annule qu'avec un de ses facteurs, la division est possible et unique. On peut donc définir, à partir d'un vecteur u, un second vecteur u' tel que:

$$u' = \frac{pq}{u} = \frac{p}{u} q = \frac{q}{u} p$$

par:

$$uu' = pq$$

$\frac{p}{u}$, $\frac{q}{u}$, sont alors les nombres (opérateurs) complexes mesurant les rapports de p, q à un vecteur arbitraire u, choisi comme unité dans le plan. Alors:

$$\frac{pq}{u^2} = \frac{p}{u}\frac{q}{u}$$

est le produit de ces nombres complexes.

Partons alors de l'identité (3), la multiplication étant complexe. De

$$ab \,.\, cd + ac \,.\, db + ad \,.\, bc = 0 \qquad (3)$$

on déduit:

$$\frac{ab \,.\, cd}{u} + \frac{ac \,.\, db}{u} + \frac{ad \,.\, bc}{u} = 0 \,, \qquad (4)$$

soit:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

c'est-à-dire qu'à tout vecteur u du plan correspond, par rapport au quadrangle $abcd$, un contour triangulaire U formé des vecteurs u_1, u_2, u_3.

En divisant par u^2 les termes de (3) on obtient la relation entre nombres complexes comme elle est habituellement employée [1]. La relation (3) elle-même indique en outre que les directions des bissectrices des couples de côtés opposés du quadrangle forment une involution.

---

[1] Il est utile de remarquer que, réciproquement, toute équation entre nombres complexes, rendue homogène, s'interprète comme équation entre produits complexes de vecteurs, par suite de l'isomorphisme signalé.

Enfin, comme évidemment:

$$\frac{ab \,.\, cd}{\dfrac{ab \,.\, cd}{u}} = \frac{ac \,.\, db}{\dfrac{ac \,.\, db}{u}} = \frac{ad \,.\, bc}{\dfrac{ad \,.\, bc}{u}}$$

ou:

$$\frac{ab \,.\, cd}{u_1} = \frac{ac \,.\, db}{u_2} = \frac{ad \,.\, bc}{u_3}$$

et les égalités qui s'ensuivent entre modules et angles, le triangle U reste semblable à lui-même quand u varie: c'est le théorème de Bellavitis.

Si on développait un produit complexe analogue entre vecteurs de l'espace, on aurait à considérer des congruences géométriques suivant un module $(u^2) + (v^2) + (w^2)$ (u, v, w étant 3 vecteurs égaux, 2-à-2 rectangulaires).

Mais une égalité telle que:

$$pq = p'q'$$

ne serait possible que si les 4 vecteurs étaient coplanaires. Autrement dit, une expression $\frac{pq}{u}$ ne pourrait en général représenter un vecteur, la division ne serait plus possible. De l'identité (3) étendue au tétraèdre, car la multiplication reste commutative, on ne pourrait en général déduire l'existence d'un triangle U correspondant à un vecteur u. Ce triangle n'existerait plus que pour des positions particulières de u. Nous allons tourner cette difficulté.

Soit $\varphi[(pq), u]$ une fonction linéaire et homogène *à la fois* par rapport au produit *algébrique* (pq) et au vecteur u, et qui représente elle-même un vecteur. Alors, en posant:

$$\varphi[(ab \,.\, cd), u] = u_1 \,, \qquad \varphi[(ac \,.\, db), u] = u_2 \,, \qquad \varphi[(ad \,.\, bc), u] = u_3$$

l'identité (3) entraîne:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \,.$$

Mais nous devons maintenant rendre la fonction précédente apte à traduire des relations de similitude afin de retrouver le théorème de Bellavitis dans le tétraèdre. Si le triangle U formé

de u_1, u_2, u_3 doit garder ses côtés proportionnels à trois nombres l^2, m^2, n^2, on devra avoir:

$$\frac{u_1 \times u_1}{l^2} = \frac{u_2 \times u_2}{m^2} = \frac{u_3 \times u_3}{n^2}$$

(le signe $\times$ caractérisant ici le produit scalaire des vecteurs).

C'est, comme on le voit, imposer au vecteur u, de satisfaire à deux équations numériques. Ces équations étant du 2me degré en u, on trouve comme solutions quatre directions de vecteurs u. Et si les nombres l^2, m^2, n^2 ont été pris proportionnels aux produits des longueurs des arêtes opposées du tétraèdre, ces directions sont perpendiculaires aux sections anti-parallèles des faces, et nous retrouvons là seulement l'équivalent du théorème plan de Bellavitis.

Décembre 1921.

SUR LE DÉPLACEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS GÉOMÉTRIE DU n-ÈDRE

PAR

Georges TIERCY (Genève).

---

1. — On sait qu'en mécanique analytique, on peut ramener l'étude du mouvement d'un système dans l'espace ordinaire à l'étude du mouvement d'un point dans un hyperespace. Il n'est donc pas dépourvu d'intérêt d'examiner de très près les propriétés des variétés à une dimension dans l'espace E_n. Dans la présente étude, on utilise la notion de *vecteur* de E_n.

On appellera *vecteur* V le système de *n nombres réels*:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n ;$$

nous dirons que les vecteurs d'un ensemble sont indépendants les uns des autres s'il n'y a entre eux aucune relation linéaire.