SUR LE DÉPLACEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS GÉOMÉTRIE DU n-ÈDRE

Autor(en): **Tiercy, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515736

de u_1, u_2, u_3 doit garder ses côtés proportionnels à trois nombres l^2, m^2, n^2, on devra avoir:

$$\frac{u_1 \times u_1}{l^2} = \frac{u_2 \times u_2}{m^2} = \frac{u_3 \times u_3}{n^2}$$

(le signe $\times$ caractérisant ici le produit scalaire des vecteurs).

C'est, comme on le voit, imposer au vecteur u, de satisfaire à deux équations numériques. Ces équations étant du 2^{me} degré en u, on trouve comme solutions quatre directions de vecteurs u. Et si les nombres l^2, m^2, n^2 ont été pris proportionnels aux produits des longueurs des arêtes opposées du tétraèdre, ces directions sont perpendiculaires aux sections anti-parallèles des faces, et nous retrouvons là seulement l'équivalent du théorème plan de Bellavitis.

Décembre 1921.

SUR LE DÉPLACEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS GÉOMÉTRIE DU n-ÈDRE

PAR

Georges Tiercy (Genève).

---

1. — On sait qu'en mécanique analytique, on peut ramener l'étude du mouvement d'un système dans l'espace ordinaire à l'étude du mouvement d'un point dans un hyperespace. Il n'est donc pas dépourvu d'intérêt d'examiner de très près les propriétés des variétés à une dimension dans l'espace E_n. Dans la présente étude, on utilise la notion de *vecteur* de E_n.

On appellera *vecteur* V le système de *n nombres réels*:

$$v_1, v_2, \dots, v_n ;$$

nous dirons que les vecteurs d'un ensemble sont indépendants les uns des autres s'il n'y a entre eux aucune relation linéaire.

Les n nombres d'un vecteur apparaissent comme les n projections, sur n axes de coordonnées, d'un segment de droite V. Il en résulte que l'espace E_n à n dimensions pourra être envisagé comme l'ensemble des vecteurs se déduisant linéairement de n vecteurs indépendants. En réalité, on se meut dans le domaine de l'algèbre.

Désignons par $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les n vecteurs indépendants ; et par $(v_{k,i})$ les n *projections* du vecteur V_k; la condition d'indépendance s'écrit :

$$\| v_{k,i} \| \neq 0 \ ;$$

si alors on désigne par X un vecteur quelconque déduit des n premiers, on aura:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i V_i \ ;$$

ou bien, pour les projections x_k de X:

$$x_k = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i v_{k.i} \ ,$$

où les ρ_i sont des nombres réels.

S'il arrive qu'un système de n nombres ne puisse être déduit linéairement de n systèmes V_i, on dira que ce vecteur est en dehors de l'espace E_n.

Les n vecteurs indépendants qui définissent un espace E_n constituent ce que nous appellerons la *base* de cet espace. Mais, de cette base, on pourra déduire une infinité d'autres ensembles de n vecteurs indépendants les uns des autres; et pour chacun, de ces nouveaux ensembles, chaque vecteur se déduira linéairement du premier ensemble. Tous ces ensembles seront dits *équibases*.

Nous supposerons connues les propriétés fondamentales de ces systèmes de nombres, nous réservant de revenir sur quelques détails essentiels. En particulier, nous supposerons le lecteur averti de tout théorème relatif à la composition ou à la décomposition des vecteurs, aux cosinus directeurs d'un vecteur, à l'angle de deux vecteurs, etc., etc.

2. — Soit, dans E_n, un vecteur variable $\overline{OP_1}$, dont les composantes s'écrivent x_i ($i = 1, 2, ..., n$). Supposons que les nombres x_i varient d'une façon continue; au bout d'un temps très court, le vecteur X est devenu $(X + d\,X)$ dont les composantes sont $(x_i + dx_i)$; ce vecteur est le résultant du système x_i et du système dx_i; nous dirons alors que l'extrémité du vecteur X a *parcouru un chemin*, dont les composantes sont les quantités dx_i; la *longueur* de ce chemin infiniment petit est donnée par:

$$ds^2 = \Sigma\, dx_i^2 .$$

Supposons que ce déplacement se continue pendant un certain temps; dans chaque instant dt, l'extrémité du vecteur décrit un petit chemin ds; au bout du temps t, nous dirons que le point X a parcouru un *arc* s *d'une courbe* $\mathcal{C}$.

Le *nombre s* ainsi défini est fonction du temps t; comme d'autre part les composantes x_i sont aussi fonctions de t, on pourra les exprimer en fonction du nombre s.

Cela posé, considérons $(n - 1)$ autres positions $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_3}$, ..., $\overline{OP_n}$ du vecteur, voisines de la position $\overline{OP_1}$; les composantes du vecteur OP_{k+1} étant:

$$(y_k)_i = x_i + dx_i + d^2x_i + ... + d^kx_i .$$

Par le point P_1, imaginons un vecteur unité (1_{p_1}), dont l'orientation varie, suivant une loi connue, en fonction du temps t ou de l'arc s de la courbe $\mathcal{C}$. Les projections de ce vecteur $(1_{p_1})_i$ sont fonctions continues de t; autrement dit, par P_1 passe une droite (p_1) dont les cosinus directeurs sont les quantités $(1_{p_1})_i$. De chacun des points P_i part donc un vecteur unité déterminé; soient (1_{p_i}) ces vecteurs.

Par P_1, menons une *parallèle* h_k à chacune des droites p_k; on détermine ainsi ce que nous appellerons des éléments *pseudo-osculateurs*; p_1 et h_2 définissent un *plan pseudo-osculateur* Π_2; $p_1, h_2, h_3, ..., h_k$ définissent un *k-plan pseudo-osculateur* Π_k.

Soit alors, dans Π_k, un point M quelconque; et soient ξ_i les composantes du vecteur OM. En appelant A_m les projections du vecteur P_1M sur les k axes de Π_k, il vient:

$$\xi_i = x_i + \sum_{m=1}^{m=k} A_m \left(1_{p_m}\right)_i ,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$\xi_i = x_i + \sum_{m=1}^{m=k} B_m \left(1_{p_1}\right)_i^{(m)} ;$$

les coefficients B_m sont évidemment les mêmes dans les n relations $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

3. — Construisons maintenant le « *n-èdre n-rectangle* » de la courbe $\mathcal{C}$, attaché au point P_1 et relatif à la direction (p_1).

Pour cela, considérons:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{dans } \Pi_2\text{, une droite } g_2 \perp \text{ à } p_1 ; \\ \text{dans } \Pi_3\text{, une droite } g_3 \perp \text{ à } \Pi_2 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{dans } \Pi_k\text{, une droite } g_k \perp \text{ à } \Pi_{k-1} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Nous savons que cela est possible. Ces n droites ($g_1 = p_1, g_2, \ldots, g_n$) forment un *n-èdre n-rectangle;* c'est le *n-èdre relatif à la direction* p_1. Les cosinus directeurs des arêtes de ce n-èdre, ou projections des vecteurs-unités portés sur ces arêtes, seront les systèmes de nombres $(1_k)_i$; pour $k = 1$, on a:

$$(1_1)_i = (1_{p_1})_i .$$

En outre, on posera:

$$\left\| (1_k)_i \right\| = +1 ;$$

le n-èdre n-rectangle relatif à (p_1) est alors dit *applicable* sur le n-èdre de référence de E_n. Et l'on connaît la propriété fondamentale du déterminant ci-dessus: chaque terme est égal à son mineur.

4. — Nous nous sommes placés dans le cas tout à fait général où le vecteur (1_{p_1}) a une direction quelconque. On passera sans difficulté au cas le plus important, qui est un cas particulier:

celui où la droite (p_1) se confond avec *la tangente* (t_1) en (P_1); on appelle *tangente* la droite passant par P_1 et portant le petit vecteur dx_i. Dans ce cas, les éléments pseudo-osculateurs en P_1 deviennent les *éléments osculateurs;* et le n-èdre rectangle attaché à P_1 et relatif au vecteur (1_{p_1}) devient le *n-èdre principal.*

5. — Prenons alors le cas du n-èdre principal; et supposons que le n-èdre de référence soit la position initiale du n-èdre mobile attaché au point P_1 de $\mathcal{C}$.

Considérons un n-èdre auxiliaire, mobile autour de l'origine fixe, et dont les arêtes soient données par les vecteurs (1_k).

Soit X un vecteur $\overline{\mathrm{OM}}$ rapporté au n-èdre fixe; et soit Ξ le même vecteur rapporté au n-èdre mobile; on a les relations:

$$X_i = \sum_{k=1}^{k=n} (1_k)_i \xi_k \; ; \qquad X = \sum_{k=1}^{k=n} 1_k \xi_k = \Xi \; . \tag{1}$$

Dérivons ces relations par rapport au temps t, les composantes ξ_k étant considérées comme constantes; il vient:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{d(1_k)_i}{dt} \; . \tag{2}$$

Ces expressions donnent les projections de la vitesse du point M considéré, sur les axes fixes; les projections de cette vitesse sur les axes mobiles seront données par:

$$V_m = \sum_{i=1}^{i=n} (1_i)_m \frac{dX_i}{dt} \; . \tag{3}$$

Tenons compte des relations existant entre les cosinus directeurs des arêtes mobiles; et posons:

$$p_{k,h} = \sum_{i=1}^{i=n} (1_i)_k \frac{d(1_i)_h}{dt} \; , \qquad \text{où} \qquad p_{k,h} = -p_{h,k} \; ; \qquad p_{h.h} = 0 \; ; \tag{4}$$

on obtient, à la place de (3), les formules:

$$V_m = \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k} \xi_k \; ; \tag{5}$$

le déterminant des quantités $p_{k,h}$ est symétrique gauche; nous appellerons ces coefficients $p_{k,h}$ les *rotations instantanées.*

6. — Supposons maintenant que l'origine du n-èdre mobile se meuve en translation; et désignons par (t_i) les translations composantes par rapport aux axes mobiles. Dans le cas où l'on considère le n-èdre principal, seule la translation (t_1) est différente de zéro.

Soit alors le déplacement le plus général d'un point, mobile lui-même par rapport au polyèdre mobile. Les projections de la vitesse sur les arêtes mobiles seront:

$$V_m = \frac{d\xi_m}{dt} + t_m + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k}\xi_k \; ; \qquad (6)$$

avec, dans le cas principal:

$$t_1 = \frac{ds}{dt} = s' \; ; \qquad t_i = 0 \; , \qquad i \neq 1 \; .$$

On a d'ailleurs les relations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} t_k (1_i)_k \; , \qquad (7)$$

qui s'écrivent comme suit dans le cas principal:

$$\frac{dx_i}{dt} = t_1 (1_i)_1 = s'(1_i)_1 \; , \qquad (8)$$

où s' est donné en fonction du temps t. On voit qu'on retrouvera les coordonnées x_i par de simples quadratures, dès qu'on aura déterminé les vecteurs (1_i) en fonction du temps.

7. — Reprenons les formules (6), et faisons-y les (t_m) nuls; c'est donc le cas où l'origine est fixe. Prenons comme vecteur Ξ le vecteur 1_i; les équations (6) deviennent:

$$0 = \frac{d(1_i)_m}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k}(1_i)_m \; : \qquad (9)$$

On a ainsi n groupes de n équations.

8. — Venons-en à la question suivante: Supposons que, d'une

façon ou d'une autre, on ait connaissance de s' et des rotations en fonction du temps; y a-t-il un mouvement correspondant à ces données?

Cela revient à déterminer les n^2 cosinus directeurs du n-èdre mobile; car alors, grâce à (8), on aura les coordonnées x_i du point P_1. Or, chacun des n groupes de n cosinus satisfait aux équations:

$$0 = \frac{d(u)_m}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k}(u)_m \ . \qquad (10)$$

On vérifiera aisément la propriété suivante: si (u) et (u') sont deux vecteurs solutions de (10), les expressions

$$|u|^2 \ , \qquad |u'|^2 \ , \qquad \text{et} \qquad u \cdot u' \ , \qquad (11)$$

sont des constantes; il suffit de dériver ces quantités par rapport à t, en tenant compte de (10) et de (4); les dérivées sont nulles.

Cette propriété permet de répondre par l'affirmative à la question posée. Soit en effet un n-èdre n-rectangle de même disposition que le n-èdre fixe; ses vecteurs-unités sont:

$$\left(u_i^0\right) \ . \qquad (12)$$

Cherchons alors les solutions de (10) qui ont les valeurs (12) pour valeurs initiales. Les expressions $|u_i|^2$ et $u_i . u_k$ étant constantes (expression 11) et valant respectivement 1 et 0 (valeurs 12), on a chaque instant les vecteurs-unités du n-èdre mobile.

La position initiale (12) est arbitraire; il y a donc une infinité de solutions; au fond, c'est un même déplacement, rapporté à des n-èdres différents.

Conclusion: les fonctions s' et $p_{m.k}$ étant données, il y correspond un seul mouvement dans E_n.

9. — *Remarque :* Quel est, par rapport au n-èdre mobile, le lieu des points de vitesse minima (si ce lieu existe) ?

Le vecteur Ξ de chaque point est alors constant; on a:

$$V^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left[t_i + \sum_{k=1}^{k=\iota} p_{i,k} \xi_k \right]^2 ;$$

égalant à zéro les dérivées de V^2 par rapport aux lettres ξ, on obtient les n équations homogènes:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_{k,i} V_k = 0 \ , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{13}$$

Si le déterminant de (13) est différent de zéro, la solution se réduit à un point de vitesse nulle. Si le déterminant de (13) est nul, les équations (13) se réduisent à (n — 1) équations distinctes (les mineurs du déterminant n'étant pas tous nuls); le lieu est alors une *variété rectiligne.*

Or, le déterminant Δ de (13) est symétrique gauche; si n est pair, ce déterminant est en général non nul; si n est impair, il est toujours nul. Si, exceptionnellement, Δ était nul, avec n pair, le lieu serait une variété linéaire à plusieurs dimensions.

10. — Revenons au cas général du polyèdre des (g_i). Et définissons ce que nous appellerons *courbures de la courbe $\mathcal{C}$ relatives au* n*-èdre des* (g_i), ou *pseudo-courbures.*

Appelons $d\nu_i$ les angles de contingence formés respectivement par les axes de même indice de deux n-èdres rectangles voisins. Si ds est l'élément d'arc de $\mathcal{C}$, la pseudo-courbure en P_1 relative à $p_1 = g_1$ sera définie par:

$$C_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\nu_1}{ds} = \frac{\nu_1'}{s'} \ ; \tag{14}$$

de même, la pseudo-courbure relative à g_i sera définie par:

$$C_i = \frac{1}{R_i} = \frac{d\nu_i}{ds} = \frac{\nu_i'}{s'} \ . \tag{15}$$

D'ailleurs, l'angle $d\nu_i$ étant infiniment petit, on a:

$$d\nu_i = \sqrt{\sum_{m=1}^{m=n} \left[d(1_i)_m\right]^2} = d(1_i) \ ; \tag{16}$$

d'où l'on tire:

$$C_i = \frac{d\nu_i}{ds} = \frac{\sqrt{\sum (1_i)_m'^2}}{\sqrt{\sum x_k'^2}} = \frac{(1_i')}{s'} \ . \tag{17}$$

On définit ainsi n pseudo-courbures pour $\mathcal{C}$ en P_1 ; nous verrons plus loin les relations qui existent entre ces différentes courbures.

Il suffira de supposer que $(1_{p_1}) = (1_{g_1})$ coïncide avec le vecteur unité *tangent* à $\mathcal{C}$ en P_1 pour obtenir les *courbures principales*, c'est-à-dire les courbures relatives au n-èdre principal.

11. — D'autre part, on a

$$|1_i|^2 = 1 \ ; \tag{18}$$

d'où

$$(1_i) \, . \, (1_i') = 0 \ ; \tag{19}$$

donc, le vecteur $(1_i')$ est perpendiculaire à la droite g_i du n-èdre relatif à p_1.

En particulier, pour $i = 1$, c'est-à-dire en considérant la droite p_1 elle-même, on obtient les formules

$$(1_1) \, . \, (1_1') = 0 \ , \qquad C_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{(1_1')}{s'} \ . \tag{20}$$

Remarquons que le vecteur $(1_1')$ est, dans π_2, porté sur la droite g_2 ; donc, on a:

$$(1_1') = \frac{(1_2)}{k} \ ;$$

d'où:

$$k = \frac{R_1}{s'} \ ; \qquad (1_2) = \frac{R_1}{s'} (1_1)' \ . \tag{21}$$

La relation (21) contient un premier groupe de n formules.

Dans le cas où $p_1 = g_1$ est la tangente à $\mathcal{C}$, on écrira, avec s comme variable indépendante:

$$(\alpha_2) = \rho_1 (\alpha_1') \ ; \tag{22}$$

c'est là le cas principal. Si on y fait $n = 3$, on retrouve le premier groupe des formules fondamentales de Frenet.

12. — Considérons maintenant les autres vecteurs du n-èdre rectangle attaché à P_1 ; et cherchons à établir, pour chacun

d'eux, des formules analogues à (21). Celles-ci peuvent s'écrire:

$$(1_1)' = \frac{(1_2)}{\left(\frac{R_1}{s'}\right)} \; ; \tag{23}$$

les dérivées $(1_1)'_n$ sont donc linéaires en $(1_i)_m$:

$$(1_1)' = \sum_i A_i (1_i) \; , \quad \text{avec} \quad A_2 = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{s'}\right)} \quad \text{et} \quad A_i = 0 \quad (i \neq 2) \; . \tag{23'}$$

Il est facile d'établir que toutes les dérivées $(1_i)'_m$ sont linéaires en $(1_k)_m$, k ne pouvant dépasser $(i+1)$.

Remarquons tout d'abord que le vecteur (1_{g_k}) appartient au $(k+1)$ — plan π_{k+1}; et, d'après la façon dont nous avons choisi les vecteurs du n-èdre rectangle en P_1, il vient la forme:

$$(1_k) = \sum_{i=0}^{i=k} B_i (1_1)^{(i)} \; ; \tag{24}$$

en effet, le n-èdre rectangle en P_1 est une *équibase* du n-èdre formé par les vecteurs (1_{p_i}).

Supposons alors que la forme linéaire de $(1_i)'$ ait été établie jusqu'à la valeur i de l'indice; et démontrons que la propriété s'étend au cas de $(i+1)$. On a par hypothèse:

$$(1_i)' = \sum_{k=1}^{k=i+1} D_k (1_k) \; . \tag{25}$$

Par différentiations successives de (23'), on tire, à cause de (25):

$$(1_1)^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{k=i+1} E_k (1_k) \; ; \tag{26}$$

relations d'ailleurs équivalentes aux équations (24). D'autre part, l'équation (24) donne, avec $k = i + 2$:

$$(1_{i+2}) = \sum_{s=0}^{s=i+2} B_s (1_1)^s \; ;$$

portons dans le deuxième membre les valeurs (26); il reste le dernier terme en $(1_1)^{(i+2)}$; on obtient la forme:

$$(1_{i+2}) = \sum_{s=0}^{s=i+1} b_s(1_{s+1}) + B_{i+2}\,(1_1)^{(i+2)} \ . \tag{27}$$

Mais, en dérivant (26), on trouve justement $(1_1)^{(i+2)}$:

$$(1_1)^{(i+2)} = \sum_{k=1}^{k=i+1} F_k(1_k) + E_{i+1}(1_{i+1})' \ . \tag{28}$$

Portons cette valeur (28) dans (27); explicitant $(1_{i+1})'$, il vient:

$$(1_{i+1})' = \sum_{k=1}^{k=i+2} Q_k(1_k) \ . \tag{29}$$

La forme (25) est donc vraie pour toute valeur de l'indice i; nous écrirons plus en détail:

$$(1_i)' = \sum_{k=1}^{k=i+1} \frac{(1_k)}{q_{i,k}} \ ; \tag{30}$$

et on sait que:

$$q_{1,1} = \infty \qquad \text{et} \qquad q_{1,2} = \frac{R_1}{s'} \ .$$

13. — Il s'agit maintenant de trouver la valeur des coefficients $\left(\frac{1}{q_{\alpha,\beta}}\right)$.

On a les relations connues:

$$|1_i|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad (1_i)\cdot(1_k) = 0 \ ,$$

d'où l'on tire:

$$(1_i)\cdot(1_i)' = 0 \qquad \text{et} \qquad (1_i)'\cdot(1_k) + (1_i)\cdot(1_k)' = 0 \ ;$$

avec les relations (30), on obtient immédiatement les égalités:

$$\frac{1}{q_{i,i}} = 0 \ ; \quad q_{i,j} = -\,q_{j,i} \qquad (i \neq j) \ ; \tag{31}$$

le déterminant des quantités $\left(\frac{1}{q_{\alpha,\beta}}\right)$ est donc symétrique gauche.

Or, nous avons établi (formule 30) que le deuxième indice ne peut dépasser le premier de plus d'une unité; il résulte alors de (31) que le deuxième membre de (30) se réduit à deux termes:

$$(1_i)' = -\frac{(1_{i-1})}{q_{i-1,i}} + \frac{(1_{i+1})}{q_{i,i+1}}\,; \tag{32}$$

lorsque $i = n$, on a : $\dfrac{1}{q_{n,n+1}} = 0.$

Il reste donc à déterminer la valeur de deux coefficients. Pour cela, partons des définitions (15) des pseudo-courbures et rayons de courbure:

$$C_i = \frac{1}{R_i} = \frac{(1_i)'}{|s'|}\,; \qquad \frac{1}{R_i^2} = \frac{|1_i'|^2}{s'^2}\,; \tag{33}$$

à cause de (32), on trouve la formule de récurrence:

$$|1_i'|^2 = \frac{1}{q^2_{i-1,i}} + \frac{1}{q^2_{i,i+1}} = \frac{s'^2}{R_i^2}\,;$$

$$\frac{1}{q^2_{i,i+1}} = \frac{s'^2}{R_i^2} - \frac{1}{q^2_{i-1,i}}\,. \tag{34}$$

On a donc finalement:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{q^2_{1,2}} = \frac{s'^2}{R_1^2}\,; \qquad \frac{1}{q^2_{i,i+1}} = s'^2 \sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{R_k^2}\,; \\ &\frac{1}{q^2_{n-1,n}} = s'^2 \sum_{k=n-1}^{k-1} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{R_k^2} = \frac{s'^2}{R_n^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

On connaît ainsi tous les coefficients des formules (32); (voir encore les paragraphes 14 et 16).

La dernière formule (35) montre que la n^e pseudo-courbure dépend des $(n-1)$ pseudo-courbures précédentes:

$$\frac{1}{R_n^2} = \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{R_k^2}\,. \tag{36}$$

Remarque : Dans le cas où (1_{p_1}) est le vecteur-unité tangent à la courbe $\mathcal{C}$, on écrira ρ au lieu de R; ou bien, en désignant par ${}_t\mathrm{C}_i$ les courbures principales:

$$ {}_t\mathrm{C}_n^2 = \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-1-k} \, {}_t\mathrm{C}_k^2 \; ; \tag{37}$$

on retrouve là une formule donnée par Hoppe [1] et Cesaro [2].

14. — On a donc en définitive les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{q_{1,1}} = 0 \; ; \qquad \dfrac{1}{q_{1,2}} = \dfrac{s'}{\mathrm{R}_1} \; ; \qquad \dfrac{1}{q_{n,n+1}} = 0 \; ; \\ \dfrac{1}{q_{i,i+1}} = + \, s' \sqrt{\displaystyle\sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{\mathrm{R}_k^2}} \; ; \end{array} \right. \tag{38}$$

où l'on a choisi le signe (+) pour le radical, ce qui correspond à la *direction positive* sur les axes g_i. Pour le dernier coefficient, par contre, on a:

$$\frac{1}{q_{n-1,n}} = \pm \, s' \sqrt{\sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-k-1} \frac{1}{\mathrm{R}_k^2}} = \frac{s'}{\mathrm{R}_n} \; ; \tag{39}$$

nous indiquerons au nº 16 comment décider entre les deux signes.

Pour simplifier l'écriture, posons maintenant:

$$\frac{1}{q_{i,i+1}} = \frac{1}{\mathrm{T}_i} \; ;$$

les formules (32) deviennent:

$$(1_i)' = - \frac{(1_{i-1})}{\mathrm{T}_{i-1}} + \frac{(1_{i+1})}{\mathrm{T}_i} \; , \tag{40}$$

avec

$$\frac{1}{\mathrm{T}_1} = \frac{s'}{\mathrm{R}_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathrm{T}_n} = 0 \; .$$

Rappelons que, réciproquement, connaissant tous les vecteurs

---

[1] Hoppe. *Archiv der Math. u. Phys.*, 1888.
[2] Cesaro. *Natürliche Geometrie*, Leipzig, 1891.

(1_i) en fonction du temps, on trouvera vite la courbe du point P_1 (voir § 6).

15. — Passons au cas remarquable ou (1_{p_1}) est le vecteur tangent à $\mathcal{C}$. On a pour le vecteur-unité tangent:

$$(\alpha_1)_m = \frac{dx_m}{dt} = \frac{x'_m}{s'} ;$$

d'où:

$$ {}_tC_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{s'} \sqrt{\sum_{m=1}^{m=n} (\alpha_1)'^2_m} = \frac{d\nu_1}{ds} ;$$

donc ρ_1 est connu. La formule (22) donne alors, avec t comme variable:

$$s'.(\alpha_2) = \rho_1 (\alpha_1)' ;$$

le deuxième vecteur-unité est donc connu. Cela permet d'obtenir la deuxième courbure principale:

$$ {}_tC_2 = \frac{(\alpha_2)'}{s'} = \frac{1}{\rho_2} .$$

D'autre part, les formules (40) deviennent:

$$(\alpha_i)' = -\frac{(\alpha_{i-1})}{\tau_{i-1}} + \frac{(\alpha_{i+1})}{\tau_i} , \qquad (40')$$

avec

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{s'}{\rho_1} , \qquad \frac{1}{\tau_n} = 0 , \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tau_i} = s' \sqrt{\sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{\rho_k^2}} ;$$

on aura donc tous les τ_i, et partant tous les vecteurs-unités du n-èdre mobile (réciproque, voir § 6).

Si, dans ces formules, on fait $n = 3$, on retrouve les formules fondamentales de Frenet.

16. — Il reste à fixer le signe du radical de la formule (39). Etudions le déterminant:

$$D = \left\| (1_1)_m \, (1_1)'_m \, (1_1)''_m \ldots (1_1)^{(n-1)}_m \right\| ;$$

il possède un signe bien déterminé; les différents termes en sont donnés par l'expression (26):

$$(1_1)^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=i} \mathrm{E}_k (1_k) \ ;$$

écrivons-la comme suit:

$$(1_1)^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=i-1} \mathrm{B}_k (1_k) + \mathrm{E}_i (1_i) \ ; \tag{41}$$

une nouvelle dérivation donne la forme:

$$(1_1)^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{k=i} \mathrm{A}_k (1_k) + \mathrm{E}_i (1_i)' \ ;$$

et, si l'on tient compte de la formule (32), on trouve pour le dernier coefficient, E_i, la formule de récurrence:

$$\mathrm{E}_{i+1} = \mathrm{E}_i \left(\frac{1}{q_{i,i+1}} \right) \ ; \tag{42}$$

Or, on a [1]:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{q_{1,2}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_2 = \frac{1}{q_{1.2}\, q_{2,3}} \ ;$$

d'où pour E_i:

$$\mathrm{E}_i = \frac{1}{q_{1.2}} \cdot \frac{1}{q_{2.3}} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{1}{q_{i-1.i}} \ . \tag{43}$$

Portons les formules (41) dans le déterminant D; combinant linéairement les colonnes, il vient l'expression:

$$\mathrm{D} = \left(\prod_{i=1}^{i=n-1} \mathrm{E}_i \right) \cdot \| (1_k)_m \| = \prod_{i=1}^{i=n-1} \mathrm{E}_i \ ;$$

---

[1] En effet :

$$(1_1)' = \frac{s'}{\mathrm{R}_1}(1_2) = \frac{(1_2)}{q_{1,2}} \ ; \qquad \text{puis} \qquad (1_1)'' = \left(\frac{1}{q_{1,2}}\right)'(1_2) + \frac{(1_2)'}{q_{1,2}} \ ;$$

or : $(1_2)' = -\dfrac{(1_1)}{q_{1,2}} + \dfrac{(1_3)}{q_{2,3}}$ à cause de (32) ; donc finalement :

$$(1_1)'' = \left(\frac{1}{q_{1,2}}\right)'(1_2) + \frac{1}{q_{1,2}} \cdot \left[-\frac{(1_1)}{q_{1,2}} + \frac{(1_3)}{q_{2,3}} \right] .$$

et, à cause de (43):

$$\mathrm{D} = \prod_{i=1}^{i=n-1} \cdot \left(\frac{1}{q_{i-1,i}^{n-i}} \right); \tag{44}$$

or, toutes les quantités $\left(\frac{1}{q_{k,k+1}}\right)$ sont positives, jusqu'à la valeur $k = n - 2$; seul, le signe de la dernière de ces quantités, $\left(\frac{1}{q_{n-1.n}}\right)$, est encore inconnu; la formule (44) le détermine, puisque le signe de D est déterminé. On définit ainsi complètement la *direction* positive sur le dernier axe g_n du n-èdre rectangle qui accompagne (1_{p_1}).

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait étudier la courbe $\mathcal{C}$ au moyen des représentations sphériques des n arêtes du n-èdre attaché au point P_1, soit pour le cas général de (1_{p_1}), soit pour le cas fondamental de (1_{g_1}). Cela reviendra encore à porter, sur chaque axe du n-èdre rectangle mobile autour de l'origine, un vecteur-unité (1_i). (Nos 5, 7, 8.)

SUR LES FORMULES DE LORENTZ

PAR

B. Niewenglowski (Paris).

Je me propose d'établir les hypothèses nécessaires et suffisantes pour conduire aux formules de la relativité restreinte.

Je conserve les notations de M. E. Picard dans sa très intéressante Notice de l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1922. La droite $X'\Omega X$ glisse sur la droite $x'Ox$ avec une vitesse constante v; ces deux droites sont de même sens. Un observateur est lié à chacune de ces droites; il y a pour chacun d'eux un temps local: t pour l'observateur fixe, T pour le second. On suppose $t = \mathrm{T} = 0$ quand Ω coïncide avec O. Un même point