Chapitre II Etude succincte d'une surface cubique à quatorze ombilics et d'une surface quadratique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES
DE LA
CRISTALLOGRAPHIE[1]

PAR

Marcel WINANTS (Liége).

CHAPITRE II.

Etude succincte d'une surface cubique à quatorze ombilics et d'une surface quadratique.

§ 1. — Etude sommaire de deux quartiques planes.

48. — Sauf expresse indication du contraire, les axes coordonnés formeront des angles droits.

Soit d'abord la courbe:

$$x^4 + y^4 = a^4 .$$

Elle admet un centre à l'origine. Les axes coordonnés et les bissectrices de leurs angles sont quatre axes de symétrie. Il existe un Λ^4 perpendiculaire au plan de la courbe.

La courbe est extérieure au cercle $X^2 + Y^2 = a^2$, sauf qu'elle le touche aux points où elle rencontre les axes coordonnés. En effet, on a:

$$(x^2 + y^2)^2 \geqq x^4 + y^4 = (X^2 + Y^2)^2 .$$

49. — Appelons δ la distance de l'origine au point (x, y) de la courbe:

$$\delta^2 = x^2 + y^2 , \qquad \delta^4 = a^4 + 2x^2y^2 ;$$

δ sera maximum pour $x = \pm y$.

[1] Voir l'*Enseign. mathém.*, t. XXII, nos 1-2, p. 5-29.

50. — Nous allons étudier la courbure de cette quartique. Deux dérivations successives de son équation conduisent à:

$$x^3 + y^3 y' = 0 \ , \qquad 3x^2 + 3y^2 y'^2 + y^3 y'' = 0 \ .$$

On en tire:

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \ , \qquad y'' = -\frac{3a^4 x^2}{y^7} \ .$$

La courbe tourne sa concavité vers le bas ou vers le haut suivant que l'ordonnée est positive ou négative. Ensuite, on a:

$$1 + y'^2 = \frac{x^6 + y^6}{y^6} \ ;$$

le rayon de courbure est donc égal à:

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(x^6 + y^6)^{\frac{3}{2}}}{3a^4 x^2 y^2} \ .$$

En annulant l'abscisse ou l'ordonnée, (elles ne peuvent d'ailleurs pas s'annuler en même temps), on trouve:

$$\rho = \infty \ .$$

Le quartique a donc quatre points d'ondulation. De l'équation même de la courbe, il résulte d'ailleurs qu'elle est rencontrée par chacune des droites $y = \pm a$, $x = \pm a$, en quatre points confondus.

51. — La quartique précédente a la symétrie d'un carré.

52. — Passons à la quartique: $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. On raisonnera comme pour la précédente. Elle est extérieure à l'ellipse: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, sauf qu'elle la touche aux points où elle rencontre les axes coordonnés. Ces quatre sommets sont des points d'ondulation.

53. — Cette quartique possède, comme l'ellipse, la symétrie d'un rectangle. Les deux courbes admettent tous les éléments de symétrie du système orthorhombique. Le plan d'une courbe plane peut être envisagé comme un plan de symétrie de la figure.

§ 2. — Une surface ayant la symétrie d'un cube.

54. — Nous allons nous occuper de la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = p^4 \ .$$

Elle est extérieure à la sphère:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = p^2 \ ,$$

sauf qu'elle la touche aux six points où les deux surfaces coupent les axes coordonnés (qui sont rectangulaires).

La forme même de l'équation montre que la surface admet la symétrie du cube:

$$\begin{gathered} C \, , \ 3\Lambda^4 \, , \ 4\Lambda^3 \, , \ 6\Lambda^2 \ , \\ 3P \ , \qquad 6P' \ . \end{gathered}$$

Les axes quaternaires de symétrie sont les axes coordonnés; et les plans P sont les plans coordonnés. Les axes ternaires ont pour équations: $x = \pm y = \pm z$. Les axes binaires sont les bissectrices des angles que font les axes coordonnés; et les plans P′ bissèquent les dièdres coordonnés.

55. — Les points où cette surface est rencontrée par ses axes ternaires et ses axes quaternaires, sont des ombilics (21). Nous allons essayer de le vérifier par un calcul direct. Nous avons rappelé plus haut (22) les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des ombilics:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x} \times \dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \ .$$

Pour la surface actuelle, calculons les dérivées premières et secondes de z. On a:

$$x^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ ; \qquad y^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ ;$$

$$3x^2 + 3z^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \ ;$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0 \ .$$

De ces équations, on tire successivement:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^3}{z^3}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^3}{z^3}\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{3x^3y^3}{z^7}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3x^2(x^4+z^4)}{z^7}\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3y^2(y^4+z^4)}{z^7}\,.$$

Les équations aux coordonnées des ombilics sont donc:

$$\frac{x^2(x^4+z^4)}{x^6+z^6} = \frac{x^3y^3}{x^3y^3} = \frac{y^2(y^4+z^4)}{y^6+z^6}\,,$$

c'est-à-dire: $x^2 = y^2 = z^2$.

Cette méthode semble ne donner que les extrémités des axes ternaires. Mais, à un certain moment, on a simplifié par une puissance de z. D'ailleurs, les ombilics, extrémités des axes quaternaires, ont, chacun, deux coordonnées nulles. Il peut donc arriver que notre méthode l'emporte sur la méthode classique.

N'existe-t-il pas d'autres ombilics ? Une transformation des coordonnées rectilignes fournirait la réponse à cette question.

56. — La courbure totale (43) est ici:

$$k = \frac{\dfrac{9x^2y^2(x^4+z^4)(y^4+z^4)}{z^{14}} - \dfrac{9x^6y^6}{z^{14}}}{\left\{1 + \dfrac{x^6}{z^6} + \dfrac{y^6}{z^6}\right\}^2} = \frac{9p^4x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2}\,.$$

Par raison de continuité, cette formule s'applique également aux points où la surface rencontre les plans coordonnés.

La courbure est ordinairement positive; mais elle s'annule tout le long des trois sections principales. Cette propriété est entièrement conforme à la symétrie.

§ 3. — **Une surface quadratique.**

57. — Il va s'agir de la surface: $\dfrac{x^4+y^4}{a^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$, où l'on suppose $a \neq c$. Cette surface n'est pas de révolution; elle est extérieure à l'ellipsoïde de révolution: $\dfrac{X^2+Y^2}{a^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$, sauf qu'elle le touche en six points (52).

58. — En recherchant les ombilics par la méthode indiquée (22), on trouve:

$$c^2 x = \pm c^2 y = \pm a^2 z \ ,$$

ce qui donne huit ombilics. Mais il y en a certainement deux autres aux extrémités de l'axe quaternaire (21), d'équations: $x = y = 0$.

La surface semble donc admettre dix ombilics.

59. — La courbure totale (43) est:

$$k = \frac{9\, a^8 c^{12} x^2 y^2 z^2}{\left\{ a^8 z^6 + c^8 (x^6 + y^6) \right\}^2} \ .$$

La courbure totale est constamment positive, sauf qu'elle s'annule le long des trois sections principales.

60. — Toutes les propriétés précédentes (57, 58, 59) sont conformes à la symétrie quadratique (ou tétragonale), ayant pour symbole (15):

$$\mathrm{C}\ , \ \Lambda^4\ , \ 2\Lambda'^2\ , \ 2\Lambda''^2\ ,$$
$$\mathrm{P}\ , \ 2\mathrm{P}'\ , \ 2\mathrm{P}'' \ .$$

Voici les équations des plans de symétrie:

$$\mathrm{P} : z = 0 \ ; \qquad \mathrm{P}' : x = 0 \ ; \ y = 0 \ ; \qquad \mathrm{P}'' : x \pm y = 0 \ .$$

Les axes Λ sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et passent par le centre.

Chapitre III.

Quelques principes généraux.

61. — Nous avons déjà rencontré plusieurs principes généraux (5, 7, 21).

Il nous semble qu'une méthode scientifique a d'autant plus de valeur qu'elle possède un plus grand nombre de pareils principes.

Notre bagage n'est certes pas encore bien vaste. Mais nous serons très heureux si nous avons pu montrer que notre méthode était, tout au moins, capable de formuler des règles générales.