§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

de ces régions, la courbure totale est positive; dans les trois autres, elle est négative.

L'ensemble des trois sections principales constitue le lieu géométrique des points paraboliques.

Tout ceci est conforme à la symétrie.

§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

75. — Dans les deux paragraphes qui vont suivre, nous donnerons moins de détails que dans les deux précédents.

Examinons d'abord la cubique plane:

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 . \qquad \text{(E)}$$

où l'on peut supposer $p > 0$. L'hypothèse $c = 0$ nous ramène à la cubique [5°, c]: $x^2 y = p^3$, que nous avons indiquée plus haut (26).

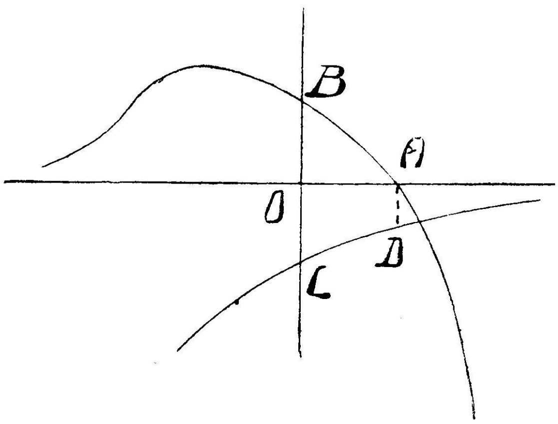

Fig. 11.

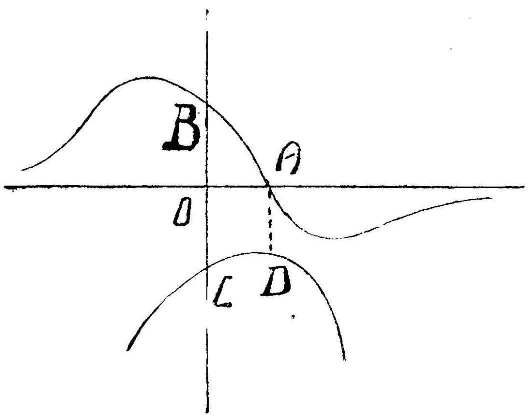

Fig. 12.

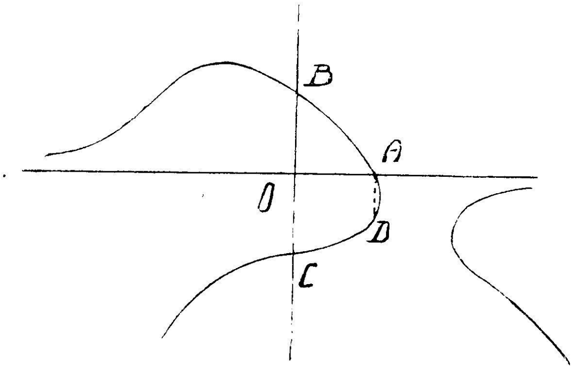

Fig. 13.

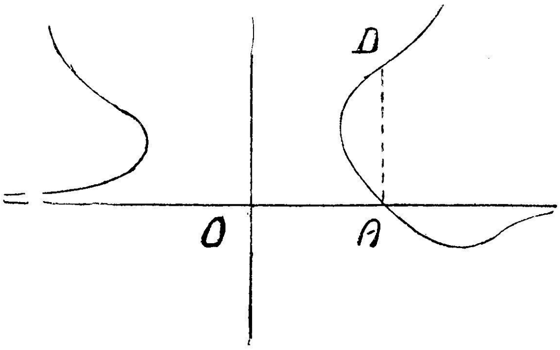

Fig. 14.

Fig. 11 : $3c^3 = 4p^3$. Fig. 12 : $0 < 3c^3 < 4p^3$.

Fig. 13 : $3c^3 > 4p^3$. Fig. 14 : $c < 0$.

76. — Cette cubique, quelle que soit la constante c, est tangente à la droite de l'infini, et admet l'axe des x comme asymptote. Rencontre-t-elle les axes coordonnés ? L'hypothèse $y = 0$ entraîne:

$$x = \frac{p^3}{c^2} > 0 \ ;$$

donc la courbe rencontre toujours son asymptote à distance finie, une seule fois, à droite de l'origine (A). De même, $x = 0$ donne:

$$y = \pm \sqrt{\frac{p^3}{c}} \ ;$$

la courbe ne rencontre pas l'axe des y quand c est < 0 (fig. 14); dans le cas contraire (fig. 11, 12, 13), elle le rencontre en deux points (B, C) symétriques par rapport à l'origine. Quand c est < 0, la cubique ne possède aucun point dans l'angle des axes où les deux coordonnées sont négatives (fig. 14).

En résolvant l'équation (E), on trouve:

$$2cy = -x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4c^3x + 4cp^3} \ ; \qquad (1)$$

$$2xy = -c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4p^3y - 4cy^3} \ . \qquad (2)$$

On en conclut l'existence de deux coniques diamétrales, conjuguées aux cordes asymptotiques:

$x^2 + 2cy = 0$ parabole ;

$2xy + c^2 = 0$ hyperbole équilatère.

77. — La cubique peut-elle admettre un point double à distance finie ? Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir simultanément:

$$f \equiv x^2y + cy^2 + c^2x - p^3 = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + c^2 = 0 \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2cy = 0 \ .$$

Les deux coniques diamétrales doivent donc se couper sur la cubique. En éliminant x, y entre les trois équations précédentes, on trouve : $3c^3 = 4p^3$. On obtient alors la cubique crunodale, que représente la fig. 11 (page 182). C'est une cubique [4°, c].

78. — Discutons d'abord la formule (2). La quantité subradicale est un polynome du troisième degré, qui ne doit prendre que des valeurs positives. Le coefficient de y^3 est $-4c$. Quand c est > 0, il y a donc un maximum pour y; on sait, en effet, que, pour des valeurs de la variable, de module suffisamment grand, tout polynome a le signe du terme où l'exposant de la variable est le plus élevé (fig. 11, 12, 13). Quand c est < 0, il existe un minimum de y (fig. 14).

Le polynome dont nous nous occupons, peut d'ailleurs s'écrire:

$$-4c\left(y^3 - \frac{p^3}{c}y - \frac{c^3}{4}\right).$$

Le discriminant de la parenthèse est:

$$\frac{c^6}{64} - \frac{p^9}{27c^3} = (3c^3 - 4p^3) \times \frac{9c^6 + 12c^3p^3 + 16p^6}{64 \times 27c^3}.$$

Si l'on raisonne comme pour le trinome du second degré, l'on arrive aux conclusions suivantes:

1º $0 < 3c^3 < 4p^3$: y admet un minimum et deux maxima (fig. 12);

2º $3c^3 > 4p^3$: y admet un seul maximum;

3º $c < 0$: y admet un seul minimum.

79. — De la formule (1), page 48, nous pourrons déduire quelques résultats analogues. Soit $f(x)$ le polynome subradical. L'équation.

$$f(x) \equiv x^4 - 4c^3x + 4cp^3 = 0$$

admet au moins deux racines imaginaires (théorème des lacunes).

Quand c est < 0 (fig. 14), l'équation a deux racines réelles, de signes contraires, entre lesquelles l'abscisse variable ne peut pas être comprise.

Supposons que c soit > 0. Si deux racines sont réelles, elles sont positives (Théorème de Descartes). Cherchons quand ce dernier fait se produit: le minimum de $f(x)$ doit être négatif. Or on a:

$$f'(x) = 4(x^3 - c^3) = 0, \quad \text{d'où} \quad x = c;$$

quand les deux racines sont réelles, elles comprennent c (Théorème de Rolle); ensuite:

$$f''(x) = 12x^2 \ ; \quad f''(c) = 12c^2 > 0 \ ;$$

$$f(c) = c^4 - 4c^4 + 4cp^3$$

$$= -c(3c^3 - 4p^3) \ .$$

Dans le cas des fig. 11 et 12 (page 182), le minimum de $f(x)$ n'est pas négatif; l'abscisse x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le cas des fig. 13 et 14, il existe un intervalle où la variable ne peut pas entrer.

80. — Voici les coefficients angulaires de quelques tangentes:

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2xy + c^2}{x^2 + 2cy} \ ;$$

$$m_A = -\frac{c^2}{\frac{p^6}{c^4}} = -\frac{c^6}{p^6} < 0 \ ;$$

$$m_{B,C} = -\frac{c^2}{\pm 2c\sqrt{\frac{p^3}{c}}} = \mp \frac{c^2}{2\sqrt{cp^3}} \lessgtr 0 \ ,$$

les tangentes aux points B, C, se coupent sur l'asymptote.

Remarque. — La parallèle menée à l'axe des y, par le point A rencontre la courbe en un point D, de coordonnées:

$$x = \frac{p^3}{c^2} \ , \qquad y = -\frac{p^6}{c^5} \ .$$

81. — Résumons ce qui précède dans un tableau synoptique:

$c < 0$: unipartite non singulière [2°, c];

$c = 0$: cuspidale [5°, c];

$0 < c < p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: bipartite [1°, c];

$c = p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: crunodale [4°, c];

$c > p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: unipartite non singulière [2°, c].

La recherche des points d'inflexion nous entraînerait trop loin.

82. — Passons à la cubique:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 \tag{1}$$

Elle va nous fournir l'occasion d'appliquer l'un de nos principes généraux (Chapitre III).

D'après ce qu'on a vu plus haut (62), cette cubique admet trois asymptotes, que nous allons, tout d'abord, rechercher.

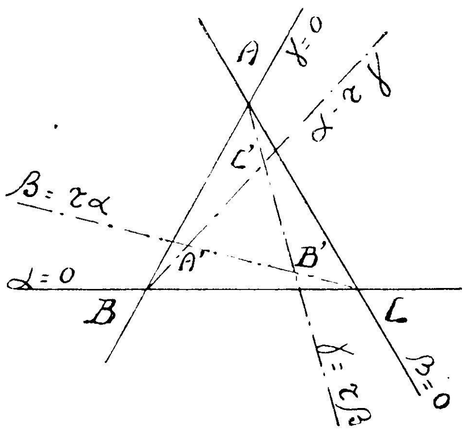

Fig. 15.

Par le sommet A, on peut mener trois droites asymptotiques, dont une seule pénètre à l'intérieur du triangle de référence; soit $\gamma = r\beta$ son équation; r est > 0; le système:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 , \qquad \gamma = r\beta ,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = h .$$

doit admettre des solutions infinies. On élimine α et γ; on trouve une équation du troisième degré en β; on doit annuler le coefficient de β^3; il vient:

$$F(r) \equiv r^3 - 3r - 1 = 0 \ ; \tag{2}$$

cette équation admet une et une seule racine positive (Théorème de Descartes); son discriminant est:

$$\frac{1}{4} - \frac{27}{27} = -\frac{3}{4} < 0 \ ;$$

les trois racines sont donc réelles; il fallait s'y attendre.

La racine positive est supérieure à l'unité, car $F(1) < 0$. Cette racine est indépendante de m.

83. Nous allons effectuer une transformation des coordonnées trilinéaires absolues. Menons les trois droites:

$$\gamma = r\beta \ ; \qquad \alpha = r\gamma \ ; \qquad \beta = r\alpha \ .$$

Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouveau triangle de référence. Dans le « Cours de Géométrie analytique plane » de Falisse, 7e édition, revue et augmentée par A. Gob, Bruxelles, 1912, à la page 578, au no 735, on donne une formule qui exprime la distance δ d'un point de coordonnées α, β, γ, à la droite que représente l'équation:

$$\Sigma u\alpha \equiv u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \ ;$$

à savoir:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - 2\Sigma uv \cos C}} .$$

Les angles du triangle primitif sont:

$$A = B = C = 60^\circ \ ;$$

donc:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - \Sigma uv}} .$$

Le côté B'C' a pour équation: $r\beta - \gamma = o$;

$$u = 0 \ , \qquad v = r \ , \qquad w = -1 \ ;$$

il vient:

$$\alpha' = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + 1 + r}} = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + r + 1}} .$$

Posons

$$\varepsilon \equiv \sqrt{r^2 + r + 1} = \text{constante positive} \ ;$$

il en résulte:

$$r\beta - \gamma = \varepsilon\alpha' \ , \qquad r\gamma - \alpha = \varepsilon\beta' \ , \qquad r\alpha - \beta = \varepsilon\gamma' \ .$$

En résolvant ces trois équations, on trouve:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon}{3r}(r\alpha' + \beta' + r^2\gamma') \ , \\ \beta &= \frac{\varepsilon}{3r}(r^2\alpha' + r\beta' + \gamma') \ , \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{3r}(\alpha' + r^2\beta' + r\gamma') \ . \end{aligned} \right.$$

On substitue ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtient

$$\begin{aligned} & r(2r+1)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) \\ & + 3(r^2 + 3r + 1)(\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = \frac{9m^3r^3}{\varepsilon^3} . \end{aligned}$$

On a tenu compte de l'équation (2). On a supprimé les accents, devenus inutiles.

La cubique a donc trois axes de symétrie ordinaire; ce sont les bissectrices intérieures du triangle A′B′C′. Ces axes ont une direction qui ne dépend nullement de m.

84. — On peut simplifier la dernière équation. On a:

$$h^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 = \Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\alpha\beta\gamma ,$$

d'où l'on tire:

$$3\Sigma\alpha^2\beta = h^3 - (\Sigma\alpha^3 + 6\alpha\beta\gamma) ;$$

l'équation de la cubique peut enfin s'écrire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 \gtreqless 0 .$$

85. — Recherchons les asymptotes. D'après ce qui précède, il existe une asymptote parallèle au nouveau côté B C.

$$\alpha = \text{constante} .$$

En combinant les deux équations:

$$\beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 , \qquad \beta + \gamma = h - \alpha , \qquad \text{(J)}$$

on obtient:

$$(h - \alpha)\,[(h - \alpha)^2 - 3\beta\gamma] + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 .$$

Le coefficient de $\beta\gamma$ est:

$$-3(h - \alpha) + 6\alpha = 3(3\alpha - h) = 0 .$$

Les équations des asymptotes sont donc:

$$\alpha = \frac{h}{3} ; \qquad \beta = \frac{h}{3} ; \qquad \gamma = \frac{h}{3} .$$

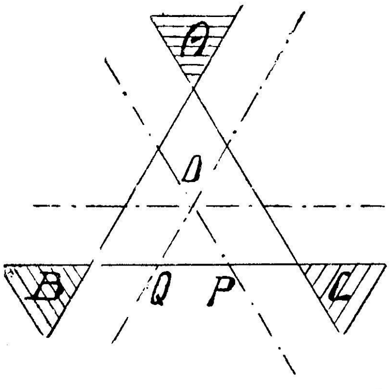

Fig. 16

La cubique a donc trois asymptotes concourantes.

86. — Comment la cubique rencontre-t-elle les côtés du triangle fondamental ? Si, dans les équations (J), on suppose $\alpha = 0$, on obtient:

$$h(h^2 - 3\beta\gamma) = k^3 , \quad \text{d'où} \quad \beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} ;$$

mais:

$$\beta + \gamma = h .$$

Les coordonnées β, γ, sont donc racines de l'équation:

$$z^2 - hz + \frac{h^3 - k^3}{3h} = 0 , \qquad (1)$$

dont le discriminant est:

$$h^2 - 4\frac{h^3 - k^3}{3h} = \frac{4k^3 - h^3}{3h} .$$

La cubique est tangente aux côtés si l'on a:

$$k^3 = \frac{h^3}{4} .$$

87. — Quand la cubique passe-t-elle en P ? Il faut que l'équation (1) ait la solution $z = \frac{h}{3}$. Alors:

$$k^3 = \frac{h^3}{3} .$$

On peut vérifier directement que, dans ce dernier cas, la cubique dégénère en un système de trois droites:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 = \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)^3 ,$$

ou

$$3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = 0 ,$$

ou encore:

$$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = 0 , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Mais

$$2\alpha - \beta - \gamma = 3\alpha - h ;$$

On a donc trois parallèles aux côtés du triangle fondamental, menées par son centre.

88. — La cubique est circonscrite au triangle A B C, si l'on a: $k^3 = h^3$; elle rencontre les trois côtés si $k^3 > \frac{h^3}{4}$; elle ne les rencontre pas si $k^3 < \frac{h^3}{4}$. Quand elle les rencontre, c'est en des points pour lesquels on a:

$$\beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} .$$

En mettant à part le cas de la dégénérescence, on a toujours affaire à une cubique [2°, a], qui satisfait aux règles de la symétrie autour d'un Λ^3 (62).

89. — Donnons un tableau-résumé de la discussion qui précède:

$k^3 > h^3$: Rencontre les prolongements des côtés. Chacune des trois branches entoure une région hachurée;

$k^3 = h^3$: Circonscrite au triangle ABC;

$\frac{h^3}{3} < k^3 < h^3$: Rencontre les côtés (entre P et C);

$k^3 = \frac{h^3}{3}$: Trois droites concourantes (dégénérescence);

$\frac{h^3}{4} < k^3 < \frac{h^3}{3}$: Rencontre les côtés (entre P et Q);

$k^3 = \frac{h^3}{4}$: Tangente aux trois côtés;

$k^3 < \frac{h^3}{4}$: Ne rencontre pas les côtés.

Toujours trois asymptotes concourantes.

§ 5. — **Une deuxième surface.**

90. — Nous allons esquisser une théorie de la surface:

$$y^2z + z^2x + x^2y = p^3 . \qquad (p > 0)$$

Elle admet certainement un axe de symétrie ternaire, d'équations:

$$x = y = z .$$

Elle ne rencontre aucun des axes coordonnés, ne pénètre pas dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle coupe les plans coordonnés suivant trois cubiques [5°,c], analogues à celle que nous avons étudiée plus haut (26, 75):

$$x = 0 , \quad y^2z = p^3 ;$$

$$y = 0 , \quad z^2x = p^3 ;$$

$$z = 0 , \quad x^2y = p^3 .$$

91. — Un plan parallèle à l'un des plans coordonnés ($z = c$), fournit, comme section, la cubique:

$$x^2y + cy^2 + c^2x = p^3 ,$$