

## § 5. — Une deuxième surface.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En mettant à part le cas de la dégénérescence, on a toujours affaire à une cubique [2<sup>o</sup>, *a*], qui satisfait aux règles de la symétrie autour d'un  $\Lambda^3$  (62).

89. — Donnons un tableau-résumé de la discussion qui précède:

- $k^3 > h^3$  : Rencontre les prolongements des côtés. Chacune des trois branches entoure une région hachurée;  
 $k^3 = h^3$  : Circonscrite au triangle ABC;  
 $\frac{h^3}{3} < k^3 < h^3$  : Rencontre les côtés (entre P et C);  
 $k^3 = \frac{h^3}{3}$  : Trois droites concourantes (dégénérescence);  
 $\frac{h^3}{4} < k^3 < \frac{h^3}{3}$  : Rencontre les côtés (entre P et Q);  
 $k^3 = \frac{h^3}{4}$  : Tangente aux trois côtés;  
 $k^3 < \frac{h^3}{4}$  : Ne rencontre pas les côtés.

Toujours trois asymptotes concourantes.

### § 5. — Une deuxième surface.

90. — Nous allons esquisser une théorie de la surface:

$$y^2z + z^2x + x^2y = p^3 \quad (p > 0)$$

Elle admet certainement un axe de symétrie ternaire, d'équations:

$$x = y = z .$$

Elle ne rencontre aucun des axes coordonnés, ne pénètre pas dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle coupe les plans coordonnés suivant trois cubiques [5<sup>o</sup>, *c*], analogues à celle que nous avons étudiée plus haut (26, 75):

$$\begin{aligned} x = 0 , \quad y^2z &= p^3 ; \\ y = 0 , \quad z^2x &= p^3 ; \\ z = 0 , \quad x^2y &= p^3 . \end{aligned}$$

91. — Un plan parallèle à l'un des plans coordonnés ( $z = c$ ), fournit, comme section, la cubique:

$$x^2y + cy^2 + c^2x = p^3 ,$$

que nous avons discutée (81). En faisant voyager le plan sécant, en laissant varier  $c$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on engendre la surface par le déplacement continu de la section, ce qui permet d'en avoir une première idée assez claire.

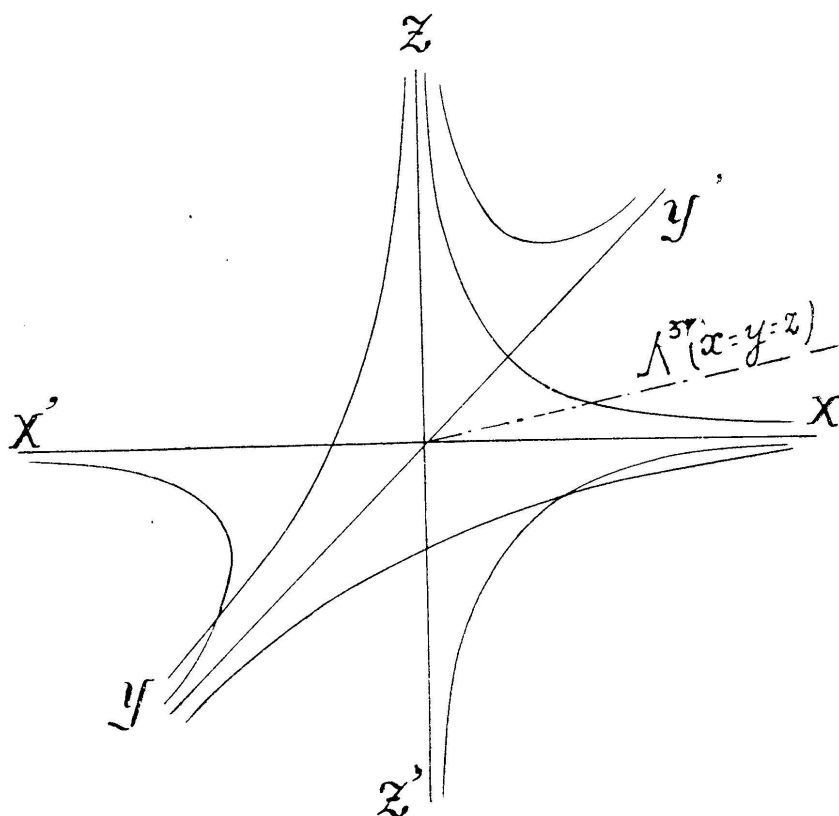


Fig. 17.

Un plan perpendiculaire au  $\Lambda^3$  (27) donne une cubique unipartite non unicursale, à trois asymptotes concourantes (82, 84, 89). Les directions asymptotiques de cette courbe restent invariables, quand le plan sécant se déplace (82, 83). Le lieu des asymptotes se compose de trois plans qui se coupent suivant le  $\Lambda^3$ . Du tableau-résumé du n° 89, on déduit que la surface est hémimorphe (63, 68).

92. — De l'étude que nous avons faite de la dernière cubique (83), résulte encore la propriété suivante: Les trois plans des asymptotes forment des dièdres dont les trois plans bissecteurs sont des plans de symétrie de la surface.

L'axe ternaire rencontre la surface en un seul point:

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} ;$$

celui-ci n'est pas un centre, car si l'on y transporte l'origine des coordonnées, l'équation de la surface devient:

$$\Sigma \left( y' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}} \right)^2 \left( z' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}} \right) = p^3 ,$$

et cette équation renferme un terme de degré pair et deux termes de degrés impairs.

La surface possède bien la symétrie de la tourmaline (63):

$$\Lambda^3 , 3P .$$

93. — En  $x, y, z$ , le plan tangent a pour équation:

$$(z^2 + 2xy)X + (x^2 + 2yz)Y + (y^2 + 2zx)Z = 3p^3 .$$

Au point où la surface rencontre son axe de symétrie, le plan tangent a pour équation:

$$X + Y + Z = p\sqrt[3]{9} .$$

Le point de contact est donc un point ordinaire (19), et, par conséquent, un ombilic (62).

94. — Signalons enfin trois points de coordonnées simples, appartenant à la surface:

$$-p, p, p ; \quad p, -p, p ; \quad p, p, -p .$$

En ces trois points, les plans tangents ont pour équations:

$$\begin{aligned} X - 3Y + Z + 3p &= 0 ; \\ X + Y - 3Z + 3p &= 0 ; \\ -3X + Y + Z + 3p &= 0 . \end{aligned}$$

Ces trois plans tangents se coupent sur l'axe ternaire.

95. — Une discussion, semblable aux précédentes, prouverait que les équations:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 ; \quad y^2z + z^2x + x^2y = 0 ,$$

représentent des cônes rhomboédriques, ayant donc la symétrie du spath d'Islande:

$$\begin{aligned} C, \Lambda^3, 3\Lambda^2, \\ 3P . \end{aligned}$$