

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1924-1925)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN  
**Autor:** Buhl, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515760>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

PAR

A. BUHL (Toulouse).

(SECONDE NOTE.)

---

Cette « Seconde Note » complète la première en allant jusqu'aux équations générales de la Théorie d'Einstein, équations construites à partir de l'identité dite « identité de Bianchi » dans les si remarquables *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* de M. T. LEVI-CIVITA; la marche générale de la démonstration est celle de M. A.-E. HARWARD.

Certes, dans un exposé pédagogique réduit, on peut s'en tenir à la loi gravitationnelle *astronomique*  $G_{\mu\nu} = 0$ ; c'est là que s'arrêtait notre « Première Note ». Mais l'exposé complet, tel qu'il peut être fait maintenant, est d'une telle élégance que c'est faire subir à la théorie une mutilation peu esthétique que ne pas aller jusque là.

Nous avons tenu aussi à montrer que les théories einsteiniennes n'étaient point apparues dans la Science aussi soudainement et merveilleusement que Minerve sortant du cerveau de Jupiter sans que, d'ailleurs, le prodigieux mérite d'Einstein puisse être mis en cause. La Théorie des Groupes de Sophus Lie présente, avec elles, de remarquables contacts, déjà signalés en maints travaux tels ceux de MM. E. CARTAN et H. WEYL.

De même, si nous avons surtout fait appel, dans les présentes Notes, aux propriétés *stokiennes*, il faut reconnaître que les équations canoniques de Jacobi et Hamilton présentent une remarquable opposition de propriétés *stokiennes* et *antistokiennes* sur laquelle Henri Poincaré a édifié d'admirables conséquences en Mécanique céleste (telles la destruction des termes séculaires

dans les développements en séries du Problème des trois corps) et en Physique mathématique.

Réparons une omission. Nous avons dit que notre *Revue* n'avait publié jusqu'ici qu'un excellent mais *unique* article, dû à M. T. Levi-Civita, sur les théories relativistes. Il en faut également mentionner un autre publié, au début de 1914, par M. L. ROUGIER. Il n'y était question que de Relativité restreinte mais il n'en pouvait être autrement en 1914; l'article exposait notamment, avec une heureuse symétrie, des travaux de M. Vladimir VARICAK que ce dernier auteur a réunis depuis en un beau volume. Pour plus de détails, au sujet de ces citations, et de toutes celles faites ci-après, on se reportera à la bibliographie placée à la fin de notre exposé.

\* \* \*

Il nous reste à rappeler aux lecteurs de la *Revue* que nous avons ouvert une tribune où chacun peut apporter ses vues ou ses résultats expérimentaux en matière d'enseignement einsteinien. A ce propos, une lettre nous est parvenue demandant non pas quelque insertion mais des explications complémentaires sur la fin du paragraphe V de notre précédente Note. Quels rapports entre la perspective ordinaire et la transformation de Lorentz ?

Il s'agit dans les deux cas de transformations homographiques. De plus il y a, de part et d'autre, des réciprociétés qui, en cinématique lorentzienne, perdent tout caractère bizarre si l'on considère les réciprociétés analogues en perspective. L'observateur A, considéré comme fixe, voit passer B devant lui, à très grande vitesse. A trouve que B est contracté dans le sens de son mouvement; pour B c'est A qui est en mouvement relatif et qui paraît avoir subi la contraction. Or il y a un fait analogue en perspective ordinaire: B s'éloigne de A et paraît, à A, avoir une taille de plus en plus petite, mais si B se retourne parfois pour examiner A, il dit aussi que A est de plus en plus éloigné et diminué en taille.

On peut faire de tels rapprochements en partant non seulement de la transformation de Lorentz mais de toutes les variations d'étalons provenant de l'emploi de  $ds^2$  quelconques. Si

d'une région  $R_1$  de l'espace-temps on observe de telles variations dans une autre région  $R_2$  il est vain de croire qu'en se transportant dans  $R_2$  on observera de près une vie déformée plus ou moins étrangement. C'est exactement comme si, observant un paysage éloigné, où arbres et personnages semblent très diminués du fait de l'éloignement, on s'imaginait découvrir quelque royaume de Lilliput que l'on pourrait repérer et aller visiter pour s'émerveiller sur place du caractère lilliputien des êtres et des choses.

Les propriétés apparentes d'espaces à  $ds^2$  quelconques sont ainsi généralement comparables aux divers aspects d'un objet pour des observateurs diversement placés. Que de brochures ont été écrites, que de conférences ont été faites qui trahissaient simplement l'incompréhension de choses aussi simples !

### X. — L'IDENTITÉ DE BIANCHI.

Nous avons vu que, dans les formules stokiennes, les dérivations en  $\partial$  pouvaient être remplacées par d'autres, plus générales, en  $D$ , dérivations s'appliquant d'ailleurs à des expressions à indices multiples supérieurs et inférieurs et ce suivant le schème

$$\frac{D}{Dx_i} A^{****} = \frac{\partial}{\partial x_i} A^{****} \begin{cases} - \Gamma_{\mu i}^\alpha A_{\alpha***}^{***} & \text{pour chaque } A_{*\mu***}^{***} \\ + \Gamma_{\alpha i}^\mu A_{****}^{*\alpha*} & \text{pour chaque } A_{****}^{*\mu*} \end{cases}$$

On vérifiera que ce schème donne bien les formules (8), (10), (25), (26), (27).

Rappelons encore que *les dérivées en  $D$  ne sont pas permutables*. L'interversion de telles dérivations conduit aux formules (29) et (30), c'est-à-dire à

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP_k}{Dx_i} & \frac{DP_k}{Dx_j} \end{array} \right| = P_\alpha B_{kji}^\alpha, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^k}{Dx_i} & \frac{DP^k}{Dx_j} \end{array} \right| = P^\alpha B_{\alpha ij}^k. \quad (34)$$

On trouve de même

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_\tau} & \frac{D}{Dx_\sigma} \\ \frac{DA_{\mu\nu}}{Dx_\tau} & \frac{DA_{\mu\nu}}{Dx_\sigma} \end{vmatrix} = B_{\mu\sigma\tau}^\rho A_{\rho\nu} + B_{\nu\sigma\tau}^\rho A_{\mu\rho} . \quad (35)$$

Rappelons encore que les expressions à indices des formules précédentes peuvent former des produits dérivables en D comme les produits ordinaires le sont en  $\partial$ . Ainsi, l'indice  $\tau$  désignant une dérivation en D par rapport à  $x_\tau$ , on a

$$(B_{\mu\nu\sigma}^\rho A_\rho)_\tau = (B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\tau A_\rho + B_{\mu\nu\sigma}^\rho A_{\rho\tau} . \quad (36)$$

Soit maintenant l'identité évidente

$$\begin{aligned} & (A_{\mu\nu\sigma\tau} - A_{\mu\nu\tau\sigma}) + (A_{\mu\sigma\tau\nu} - A_{\mu\sigma\nu\tau}) + (A_{\mu\tau\nu\sigma} - A_{\mu\tau\sigma\nu}) \\ &= (A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})_\tau + (A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma})_\nu + (A_{\mu\tau\nu} - A_{\mu\nu\tau})_\sigma . \end{aligned}$$

Dans la première ligne donnons aux parenthèses la forme du second membre de (35), dans la seconde la forme du second membre de la première relation (34); si alors on effectue les dérivations conformément à (36), il vient

$$(B_{\nu\sigma\tau}^\rho + B_{\sigma\tau\nu}^\rho + B_{\tau\nu\sigma}^\rho) A_{\mu\rho} = [(B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\tau + (B_{\mu\sigma\tau}^\rho)_\nu + (B_{\mu\tau\nu}^\rho)_\sigma] A_\rho .$$

Or, comme on peut le vérifier directement,

$$B_{\nu\sigma\tau}^\rho + B_{\sigma\tau\nu}^\rho + B_{\tau\nu\sigma}^\rho = 0 . \quad (37)$$

Donc

$$(B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\tau + (B_{\mu\sigma\tau}^\rho)_\nu + (B_{\mu\tau\nu}^\rho)_\sigma = 0 . \quad (38)$$

Telle est l'égalité que M. T. Levi-Civita appelle l'*identité de Bianchi*; le procédé de démonstration précédent est dû à M. A.-E. Harward.

Si l'on observe que

$$B_{\nu\sigma\tau}^\rho = -B_{\nu\tau\sigma}^\rho , \quad (39)$$

cette identité (38) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_\nu} & \frac{D}{Dx_\sigma} & \frac{D}{Dx_\tau} \\ B_{\mu\nu\omega}^\rho & B_{\mu\sigma\omega}^\rho & B_{\mu\tau\omega}^\rho \\ \nu & \sigma & \tau \end{vmatrix} = 0 . \quad (40)$$

Elle a alors exactement même structure que les mineurs des termes de la première ligne dans le déterminant  $\Delta_2$  de la seconde formule stokienne fondamentale (3) et ceci est de la plus haute importance; nous verrons bientôt, en effet, que les théories einsteiniennes font reposer les conceptions mécaniques générales sur l'identité (40) et, comme l'électromagnétisme repose sur (3) il y a ici une manière de saisir un des principaux liens unissant les deux disciplines.

Ajoutons que (40) n'est qu'un cas très particulier des « Identities de la Gravifique » récemment réétudiées et réexposées de manière particulièrement didactique par M. Th. De Donder.

### XI. — COMPLÉMENTS SUR LES B A QUATRE INDICES.

Par définition et avec le mécanisme des  $g$  à deux indices exposé au paragraphe VIII, on a

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}, \quad B_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = g^{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (41)$$

D'après (31) on voit facilement que  $B_{\mu\nu\sigma\tau}$  peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \tau \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right] + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\nu} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} \beta\nu \\ \tau \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} \nu\mu \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} \beta\sigma \\ \tau \end{matrix} \right].$$

Si l'on tient compte de la formule du paragraphe VIII

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \left[ \begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right],$$

il vient, toujours pour  $B_{\mu\nu\sigma\tau}$ , après simplifications

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} \right) + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} \nu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right].$$

De là résulte

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = - B_{\mu\sigma\nu\tau}, \quad B_{\tau\nu\sigma\mu} = - B_{\mu\nu\sigma\tau}, \quad (42)$$

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau\mu\nu}, \quad B_{\nu\mu\tau\sigma} = B_{\mu\nu\sigma\tau}. \quad (43)$$

D'après la définition, encore donnée au paragraphe VIII, pour  $G_{\alpha i}$ , on a

$$G_{\mu\nu} = g_{\sigma}^{\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = B_{\mu\nu\sigma}^{\sigma} = g^{\sigma\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (44)$$

On conclut de là, d'après la dernière identité (43),

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} . \quad (45)$$

L'expression

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

donne, d'après ce que nous avons vu (§ VI) pour toutes les expressions de même nature,

$$G_\sigma = \frac{DG}{Dx_\sigma} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \quad (46)$$

On sait que  $G$  est la *courbure scalaire* pour l'espace dont le  $ds^2$  est

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j .$$

Dans le cas d'une surface ordinaire,  $G$  se réduit à la courbure totale.

## XII. — EQUATIONS GRAVIFIQUES GÉNÉRALES.

Reprenons l'identité de Bianchi, sous la forme (38), et *contractons* la en faisant  $\tau$  égal à  $\rho$ ; il vient

$$(B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho + G_{\mu\sigma\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0 .$$

On conclut de là

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho &= (g^{\mu\nu} B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho = (g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau})_\rho \\ &= (g^{\rho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu})_\rho = (g^{\rho\tau} B_{\tau\sigma\nu}^\nu)_\rho = (g^{\rho\tau} G_{\tau\sigma})_\rho = G_{\sigma\rho}^\rho . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma\nu} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma})_\nu = G_{\sigma\nu}^\nu , \\ g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})_\sigma = G_\sigma . \end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de (46),

$$2G_{\sigma\nu}^\nu = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \quad (47)$$

Telle est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne; au fond ce n'est que l'identité de Bianchi *contractée*. Le raisonnement ici employé est encore emprunté à M. A.-E. Harward.

L'identité (47) peut s'écrire

$$\left( G_{\sigma}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma}^{\nu} G \right)_{,\nu} = 0 .$$

L'expression identiquement nulle ainsi formée est une *divergence* généralisée; si, pour raison expérimentale, par exemple, ou, dans une théorie physique quelconque, on se trouve en présence d'une autre divergence  $T_{\sigma}^{\nu}$  nulle, on pourra tenter une théorie phénoménale en posant

$$G_{\sigma}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma}^{\nu} G \equiv T_{\sigma}^{\nu} . \tag{48}$$

Telles sont les équations générales d'Einstein. Le signe  $\equiv$  indique que l'égalité peut n'avoir lieu qu'à un facteur constant près, facteur pouvant simplement dépendre du choix des unités.

Rappelons que, dans le cas de la matière discontinue (cas astronomique), la loi de gravitation est simplement

$$G_{\mu\nu} = 0 . \tag{49}$$

Il y a là *dix* équations permettant de déterminer les *dix*  $g_{\mu\nu}$  d'un  $ds^2$  quadridimensionnel. Les équations (49), d'après la dernière (34), peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^i}{Dx_i} & \frac{DP^i}{Dx_j} \end{array} \right] = 0 , \quad \left[ \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^j}{Dx_i} & \frac{DP^j}{Dx_j} \end{array} \right] = 0 , \tag{50}$$

qui doivent avoir lieu quel que soit le vecteur P. Ces deux formes n'en font qu'une mais si l'on n'en écrivait qu'une on pourrait croire, à tort, que la loi de gravitation n'est pas parfaitement symétrique.

Que l'on revienne maintenant aux équations générales de l'électromagnétisme, déduites (§ I) du déterminant  $\Delta_2$ , à la loi de gravitation exprimée en (50), aux équations générales (48) déduites de l'identité de Bianchi (49) et l'on pourra admirer la synthèse einsteinienne en ses résultats les plus symétriques et les plus élémentaires.



Au point de vue analytique, les symétries ne sont que des symétries de déterminants. Le « Calcul tensoriel » ou le « Calcul différentiel absolu » peuvent n'être considérés que comme des prolongements, exceptionnellement heureux toutefois, de la théorie des déterminants fonctionnels.

Remarquons encore que (49) est un cas particulier de (48). En effet

$$G_{\sigma}^{\nu} = g^{\nu\alpha} G_{\sigma\alpha}, \quad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}.$$

Donc (49) coïncide avec (48) à second membre nul.

### XIII. — ANALOGIES. — GROUPES.

Nous revenons ici, avec une extrême brièveté, sur les fondements de la Théorie des Groupes continus due à Sophus Lie. Le but est de montrer les analogies entre l'analyse de Lie et l'analyse précédente. Nous reprenons les échelons des démonstrations fondamentales en sautant de l'un à l'autre sans démonstrations développées; pour celles-ci le mieux serait de se reporter aux excellentes *Lezioni* de Luigi Bianchi.

1. — Soient les formules de transformation

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r). \quad (51)$$

Leur itération donne

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; b_1, b_2, \dots, b_r) \quad (52)$$

ou bien, si ces formules donnent naissance à un groupe,

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; c_1, c_2, \dots, c_r). \quad (53)$$

Montrons d'abord qu'il existe de certaines fonctions  $F$  des  $x'$  et des  $a$  restant constantes, c'est-à-dire donnant

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0.$$

en vertu d'équations différentielles à former.

Soient  $\alpha_{jk} (a_1, a_2, \dots, a_r)$  ou, plus brièvement,  $\alpha_{jk} (a)$ , des fonctions, en nombre  $r^2$ , formant un déterminant  $\alpha$ . On voit déjà que ces fonctions sont comparables aux  $g_{jk}$  des  $ds^2$  einsteiniens, le déterminant  $\alpha$  étant comparable à  $g$ .

Formons

$$\alpha_{jk} \frac{\partial F}{\partial a_k} + \alpha_{jk} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0 ,$$

ce que l'on conviendra d'écrire

$$Y_j(F) = A_j(F) + X'_j(F) = 0 , \quad (54)$$

en posant

$$A_j(F) = \alpha_{jk} \frac{\partial F}{\partial a_k} , \quad X'_j(F) = \xi_{ji}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_i} , \quad \xi_{ji}(x') = \alpha_{jk} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} . \quad (55)$$

Cette dernière équation donne enfin

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl} \xi_{ji}(x') . \quad (56)$$

Cette formule représente le *premier système fondamental* de Lie; il s'intègre avec  $n$  constantes arbitraires  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Le raisonnement fait déjà apparaître, en (55), deux systèmes de *transformations infinitésimales*.

2. — Les équations (54), étant vérifiables, forment un *système complet*. C'est dire que

$$(Y_j, Y_k) = Y_j Y_k - Y_k Y_j = c_{jks} Y_s .$$

Les choses étant disposées pour que les  $A$  ne dépendent que des  $a$  et les  $X'$  que des  $x'$ , nos dernières équations doivent se scinder en

$$(A_j, A_k) = c_{jks} A_s , \quad (X'_j, X'_k) = c_{jks} X'_s , \quad (57)$$

les  $c_{jks}$  ne dépendant pas des  $x'$  dans la première de ces relations et ne dépendant pas des  $a$  dans la seconde. Il s'ensuit que ces  $c_{jks}$  ne peuvent être que de simples constantes numériques; ce sont les *constantes de structure*.

3. — Aux  $\alpha_{ik}(a)$  adjoignons des  $\alpha_{ik}(b)$  et des  $\alpha_{ik}(c)$ . Le système

$$\alpha_{ik}(b) \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha_{i\lambda}(c) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

est encore *complet*, de par la première équation (57). Multipliant par  $\alpha^{sk}(b)$ , on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha^{sk}(b) \alpha_{s\lambda}(c) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{sk}(b) \alpha_{s\lambda}(c). \quad (58)$$

C'est là un système du type (56); il peut être intégré par des formules telles que

$$\begin{cases} c_i = c_i(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r), \\ a_i = c_i(a_1, a_2, \dots, a_r; a_1^0, a_2^0, \dots, a_r^0). \end{cases}$$

Enfin

$$\frac{\partial x_i''}{\partial b_k} = \frac{\partial x_i''}{\partial c_\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{t\lambda}(c) \xi_{ti}(x'') \alpha^{sk}(b) \alpha_{s\lambda}(c) = \xi_{si}(x'') \alpha^{sk}(b).$$

C'est encore un système du type (56) correspondant, cette fois, à l'équation (52); celle-ci doit bien contenir les  $x'$  puisque (53), pour  $b_k = a_k^0$  d'où  $c_k = a_k$ , donne  $x'' = x'$  d'après (51).

On peut déjà conclure que la co-existence des formules (51), (52), (53) est assurée par celle des formules (56) et (57).

4. — Les trois paragraphes précédents représentent, en somme, les trois théorèmes fondamentaux de Lie.

Un perfectionnement important fut obtenu par Maurer qui montra que les  $\alpha^{ik}$  pouvaient être isolés en des équations différentielles spéciales.

La première équation (57) développée donne

$$\alpha_{jm} \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial a_m} - \alpha_{km} \frac{\partial \alpha_{jn}}{\partial a_m} = c_{jks} \alpha_{sn}.$$

Multipliant par  $\alpha^{tn}$  on peut écrire ensuite

$$\alpha_{jm} \alpha_{kn} \left( \frac{\partial \alpha^{tm}}{\partial a_n} - \frac{\partial \alpha^{tn}}{\partial a_m} \right) = c_{jkt} .$$

Multipliant par  $\alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu}$ , il vient

$$\frac{\partial \alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu} = c_{jkt} \alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu} . \tag{59}$$

Telles sont les *équations de Maurer*.

La formule de Stokes, prise sous la forme

$$\int_C \alpha^{t\lambda} da_\lambda = \frac{1}{2} \int_S \int \left( \frac{\partial \alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu} \right) da_\mu da_\nu ,$$

les transforme en

$$\int_C \alpha^{t\lambda} da_\lambda = \frac{1}{2} c_{jkt} \int_S \int \alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu} da_\mu da_\nu . \tag{60}$$

On peut montrer, comme l'a fait Schur, que l'intégration des équations de Maurer se ramène à celle d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, c'est-à-dire uniquement à des opérations *algébriques*. Nous n'insisterons pas davantage; remarquons seulement que notre brève esquisse appuie la théorie générale sur la construction préliminaire du *groupe paramétrique*, groupe défini par la première équation (57).

Rappelons cependant l'*identité de Jacobi*, entre opérateurs  $X( )$ ,

$$\begin{vmatrix} X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \end{vmatrix} = 0 , \quad \text{d'où} \quad \begin{vmatrix} c_{si\tau} & c_{sj\tau} & c_{sk\tau} \\ c_{i\omega s} & c_{j\omega s} & c_{k\omega s} \\ i & j & k \end{vmatrix} = 0 \tag{61}$$

si l'on tient compte de la seconde équation (57) pour des mineurs tels que

$$X_j X_k - X_k X_j = (X_j, X_k) .$$

En outre on voit aisément, par exemple à l'aide de (59), que

$$c_{jkt} + c_{kjt} = 0 . \tag{62}$$

5. — Il est facile maintenant d'indiquer les remarquables analogies offertes par l'analyse des théories einsteiniennes d'une part, par l'analyse de la théorie des groupes de Lie d'autre part. On pourrait d'ailleurs les développer bien davantage. Contentons-nous, pour l'instant, de remarquer que dans les Théories de :

*Lie*

*Einstein*

Deux formes différentielles, l'une linéaire, l'autre bilinéaire, jouent un rôle fondamental.

Ce sont les deux formes engagées sous les intégrales dans l'équation (60).

Ce sont :

$$P_i dx_i, \quad M_{ij} dx_i dx_j. \quad (4)$$

Les formules stokiennes interviennent à la base des deux théories.

Ces deux théories ont des opérateurs de dérivation plus généraux que les dérivées partielles ordinaires et, en général, non permutable.

Ce sont les transformations infinitésimales

$$A_j(F), \quad X_j(F). \quad (55)$$

Ce sont les dérivées en D conformes à l'équation schématique du début du paragraphe X.

Il y a des égalités, se construisant à l'aide de déterminants symboliques, qui, d'une théorie à l'autre, se comparent aisément.

Telle est l'identité de Jacobi avec sa conséquence (61).  
Voir aussi (62).

Telle est l'identité de Bianchi (40).  
Voir aussi (39).

Signalons encore que, dans ses *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* (pp. 289-295), M. T. Levi-Civita étudie des « dérivées d'arcs » dont la permutable est de même nature que celle d'opérateurs X.

Il y a même là une véritable correspondance entre opérateurs D et opérateurs X.

Dans le même ordre d'idées la Théorie des Groupes, de par ses applications géométriques, se combine tout naturellement avec la Théorie des variétés à  $ds^2$  donné; plusieurs chapitres de Lie et de Bianchi en font foi très simplement.

Enfin, après avoir rapproché Lie et Einstein, il est presque impossible de ne pas dire quelques mots de l'admirable conférence faite au Congrès de Toronto par M. Elie CARTAN, conférence reproduite par *L'Enseignement mathématique* en tête du présent volume. Ici nous venons seulement de rapprocher les bases analytiques des deux théories. Envisager le jeu des groupes dans les espaces généralisés est une autre question ; cependant, comme le montre M. Cartan, ce jeu n'est souvent possible que grâce au parallélisme généralisé de M. Levi-Civita et, comme nous l'avons montré, ce parallélisme apparaît immédiatement avec les toutes premières propriétés déduites de nos identités fondamentales (1). Ces identités, nous y reviendrons plus loin (§ 15), peuvent être considérées à un point de vue purement analytique ou comme attachées à des volumes ou aires de l'espace euclidien. C'est donc l'étude approfondie de l'espace euclidien qui peut inciter à envisager des espaces différents ; de même le seul usage du symbole analytique permet de créer *logiquement* espaces et groupes.

XIV. — FORMULES ANTISTOKIENNES. — EQUATIONS CANONIQUES.

Abordons maintenant les analogies des Théories einsteiniennes et des Théories dynamiques classiques. Le sujet possède déjà de nombreux développements faits à différents points de vue. Ici nous voulons simplement faire naître les équations canoniques de Jacobi-Hamilton de considérations analogues à celles sur lesquelles repose l'analyse einsteinienne.

Soient les deux types de matrices

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_3} & \dots \end{array} ; \begin{array}{ccc} \frac{\partial A}{\partial x_j} & \frac{\partial B}{\partial x_j} & \frac{\partial C}{\partial x_j} \\ \frac{\partial A}{\partial y_j} & \frac{\partial B}{\partial y_j} & \frac{\partial C}{\partial y_j} \end{array} \dots \quad (63)$$

Le premier type suppose au moins deux fonctions et un nombre quelconque de variables ; c'est le type déterminant fonctionnel ou type *stokien* qui joue le rôle fondamental en Analyse einsteinienne. Le second type (63) suppose un nombre quelconque

de fonctions et au moins deux variables, généralement deux séries de variables; ce sera le type *antistokien*.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la seconde matrice (63) consiste à supposer nuls les mineurs qu'on en peut tirer; ceci s'écrira, par exemple,

$$\frac{\partial B}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial y_j} - \frac{\partial B}{\partial y_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} = 0$$

avec  $j$  devenant naturellement indice de sommation. Pour satisfaire à une telle équation nous pouvons nous donner arbitrairement B ou C, soit C. Alors B satisfait à une équation aux dérivées partielles dont l'intégration entraîne la considération préliminaire du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial C}{\partial y_j}, \quad \frac{dy_j}{dt} = - \frac{\partial C}{\partial x_j}. \quad (64)$$

Ce sont précisément les *équations canoniques* de Jacobi et Hamilton. Elles représentent la partie *amétrique* de la Dynamique; pour qu'elles s'appliquent réellement à un système dynamique il faut pouvoir exprimer la *force vive* de celui-ci, ce qui suppose un  $ds^2$  bien déterminé pour chaque point du système; les choses se passent donc ici comme en Gravifique.

Pour plus de détails nous renverrons à notre Quatrième Mémoire des *Annales de Toulouse* et aux *Leçons de Mécanique Céleste* de H. Poincaré. Le tome premier de ces *Leçons* repose entièrement sur les propriétés des équations canoniques, propriétés *stokiennes* quant aux *solutions*, *antistokiennes* quant aux *intégrales* de ces équations.

C'est ainsi que l'on aperçoit déjà, chez l'illustre savant que fut Henri Poincaré, des méthodes propres à réunir la Physique mathématique et la Mécanique céleste.

## XV. — EQUATIONS DE MAXWELL. — COMPLÉMENTS.

Les équations de Maxwell-Lorentz données dans notre Première Note sont les équations parfaitement symétriques qui jouent le rôle essentiel dans les travaux de Lorentz lui même. L'illustre savant paraît y tenir particulièrement et a même écrit

à leur sujet: Though perhaps the way in which they are deduced will be changed in future years, it is hardly conceivable that the equations themselves will have to be altered (*Theory of Electrons*, 1916, p. 6).

Ceci n'empêche pas que d'autres ouvrages posent les équations de Maxwell sous une forme plus générale; l'essentiel est alors de remarquer que les nouvelles équations sont encore des adaptations des systèmes (14) et (15). Voici un important exemple.

D'abord, dans le système (14), convenons d'écrire  $4\pi\rho$  au lieu de  $\rho$ . Posons ensuite  $\rho V = C$  et

$$\begin{aligned} (M_{23}, M_{31}, M_{12}) &\equiv B, & (M_{14}, M_{24}, M_{34}) &\equiv -c\mathcal{H}, \\ (M_{23}^*, M_{31}^*, M_{12}^*) &\equiv \mathcal{B}, & (M_{14}^*, M_{24}^*, M_{34}^*) &\equiv c(H - H^e). \end{aligned}$$

Alors les systèmes (14) et (15) deviennent

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{H} &= \frac{1}{c} \left( 4\pi C + \frac{\partial B}{\partial t} \right), & \text{div } B &= 4\pi\rho; \\ \text{rot } (H - H^e) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathcal{B} &= 0. \end{aligned}$$

Telles sont les équations de Maxwell dans la *Théorie mathématique de l'Electricité* de M. Th. De Donder (pp. 162-164).  $B$  est l'induction électrique,  $\mathcal{B}$  est l'induction magnétique,  $C$  est le courant de convection. De plus

$$H - H^e = H^i + H^s$$

avec  $H^i$  force électrique induite et  $\text{rot } H^s = 0$ .

Des formules à peu près analogues sont données par M. Francis D. Murnaghan qui insiste beaucoup sur le caractère *amétrique* des équations de Maxwell. La chose était sans doute bien connue et peut même être considérée comme évidente, mais on ne saurait trop marquer son rôle au début des théories gravifiques. Les systèmes (14) et (15) sont même indépendants de tout substratum géométrique, métrique ou amétrique, la seconde identité (1) qui leur donne naissance pouvant être considérée à un point de vue exclusivement analytique, dans le domaine du nombre pur; le volume  $V$  et sa frontière, la surface  $S$ , ne sont intervenus que comme images *commodes*, l'appel aux notions géométriques n'étant obligatoire en rien.



## XVI. — BIBLIOGRAPHIE

- L. BIANCHI. 1<sup>o</sup> *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi continui finiti di Trasformazioni* (Pisa, E. Spoerri, 1918). Exposé beaucoup plus maniable que celui de S. Lie et reposant d'ailleurs sur les principes résumés à la fin du tome III de Lie.
- 2<sup>o</sup> *Lezioni di Geometria differenziale* (Nicola Zanichelli, Bologna, 1924). Troisième édition. Ce magnifique ouvrage expose une géométrie qui est le substratum même des théories einsteiniennes. L'« identité de Bianchi » s'y trouve (Vol. II, Parte II, pp. 438-440), mais avec des notations différentes de celles employées ici.
- A. BUHL. *Sur les formules fondamentales de l'Electromagnétisme et de la Gravifique*. Quatrième Mémoire. (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse » 1924.) Propriétés stokiennes et antistokiennes des équations canoniques.
- Th. De DONDER. 1<sup>o</sup> *La Gravifique de Weyl-Eddington-Einstein* (Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1924). Gravifique généralisée, aux  $\Gamma_{ij}^\alpha$ , dont il a été question dans notre premier article (§ II); cette généralisation ne paraît pas valoir autant qu'elle permettait d'espérer. Elle a néanmoins fait étudier des « identités » comprenant celle de Bianchi comme cas très particulier. Voir analyse dans le présent fascicule de *L'Ens. mathématique*.
- 2<sup>o</sup> *Théorie mathématique de l'Electricité* (Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1925). Premier volume présenté comme « Introduction aux Equations de Maxwell ». Ces équations sont obtenues sous la forme rappelée ici au paragraphe XV. L'ouvrage, d'esprit euclidien, se rapporte, de ce fait, à l'électrodynamique des corps en repos, le cas de la matière en mouvement correspondant à la Gravifique einsteinienne. Une analyse sera publiée ultérieurement dans *L'Ens. mathématique*.
- A.-E. HARWARD. *The Identical Relations in Einstein's Theory* (« Philosophical Magazine », Vol. XLIV, Sixth Series, July-December, 1922). Identité de Bianchi et contraction de celle-ci.
- T. LEVI-CIVITA. *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* (A. Stock, Rome, 1925). Voir analyse dans le présent fascicule de *L'Ens. mathématique*.
- S. LIE. *Theorie der Transformationsgruppen*. Trois volumes (B.-G. Teubner, Leipzig; 1888, 1890, 1893). Le résumé placé à la fin du tome III contient notamment un aperçu des travaux de Maurer et de Schur.
- Francis D. MURNAGHAN. *Vector Analysis and the Theory of Relativity* (The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1922). Analyse élémentaire et élégante, de même portée que celle ici exposée. Une analyse bibliographique a été publiée dans *L'Ens. mathém.* (1923, p. 120).
- H. POINCARÉ. *Leçons de Mécanique Céleste* (Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1905). Tome I. Le Chapitre I a trait aux propriétés essentielles des équations canoniques. Voir analyse dans *L'Ens. mathématique* (1906, p. 248).
- L. ROUGIER. *L'utilisation de la Géométrie non-euclidienne dans la Physique de la Relativité* (« L'Enseignement mathématique », 1914, pp. 5-18).
- V. VARICAK. *Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume* (Zaklada Tiskare Narodnih Novina, Zagreb, 1924). Voir analyse dans *L'Ens. math.* (1923, p. 236).