

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1924-1925)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN
Kapitel: XI. — Compléments sur les B a quatre indices.
Autor: Buhl, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515760>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Elle a alors exactement même structure que les mineurs des termes de la première ligne dans le déterminant Δ_2 de la seconde formule stokienne fondamentale (3) et ceci est de la plus haute importance; nous verrons bientôt, en effet, que les théories einsteiniennes font reposer les conceptions mécaniques générales sur l'identité (40) et, comme l'électromagnétisme repose sur (3) il y a ici une manière de saisir un des principaux liens unissant les deux disciplines.

Ajoutons que (40) n'est qu'un cas très particulier des « Identities de la Gravifique » récemment réétudiées et réexposées de manière particulièrement didactique par M. Th. De Donder.

XI. — COMPLÉMENTS SUR LES B A QUATRE INDICES.

Par définition et avec le mécanisme des g à deux indices exposé au paragraphe VIII, on a

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}, \quad B_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = g^{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (41)$$

D'après (31) on voit facilement que $B_{\mu\nu\sigma\tau}$ peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\begin{matrix} \mu\sigma \\ \tau \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[\begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right] + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\nu} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} \beta\nu \\ \tau \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} \nu\mu \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} \beta\sigma \\ \tau \end{matrix} \right].$$

Si l'on tient compte de la formule du paragraphe VIII

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right],$$

il vient, toujours pour $B_{\mu\nu\sigma\tau}$, après simplifications

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} \right) + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} \nu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right].$$

De là résulte

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = - B_{\mu\sigma\nu\tau}, \quad B_{\tau\nu\sigma\mu} = - B_{\mu\nu\sigma\tau}, \quad (42)$$

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau\mu\nu}, \quad B_{\nu\mu\tau\sigma} = B_{\mu\nu\sigma\tau}. \quad (43)$$

D'après la définition, encore donnée au paragraphe VIII, pour $G_{\alpha i}$, on a

$$G_{\mu\nu} = g_{\sigma}^{\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = B_{\mu\nu\sigma}^{\sigma} = g^{\sigma\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (44)$$

On conclut de là, d'après la dernière identité (43),

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} . \quad (45)$$

L'expression

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

donne, d'après ce que nous avons vu (§ VI) pour toutes les expressions de même nature,

$$G_\sigma = \frac{DG}{Dx_\sigma} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \quad (46)$$

On sait que G est la *courbure scalaire* pour l'espace dont le ds^2 est

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j .$$

Dans le cas d'une surface ordinaire, G se réduit à la courbure totale.

XII. — EQUATIONS GRAVIFIQUES GÉNÉRALES.

Reprenons l'identité de Bianchi, sous la forme (38), et *contractons* la en faisant τ égal à ρ ; il vient

$$(B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho + G_{\mu\sigma\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0 .$$

On conclut de là

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho &= (g^{\mu\nu} B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho = (g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau})_\rho \\ &= (g^{\rho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu})_\rho = (g^{\rho\tau} B_{\tau\sigma\nu}^\nu)_\rho = (g^{\rho\tau} G_{\tau\sigma})_\rho = G_{\sigma\rho}^\rho . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma\nu} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma})_\nu = G_{\sigma\nu}^\nu , \\ g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})_\sigma = G_\sigma . \end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de (46),

$$2G_{\sigma\nu}^\nu = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \quad (47)$$

Telle est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne; au fond ce n'est que l'identité de Bianchi *contractée*. Le raisonnement ici employé est encore emprunté à M. A.-E. Harward.