Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Kapitel: VIII

Autor: Cartan, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515748

invariante une quadrique (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hyperquadrique (2me forme de la loi, avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance des trajectoires.

Si l'on se place au second point de vue, la seule connaissance des lois de propagation de la lumière, supposées définies par une équation de Monge quadratique, permet d'attribuer à l'Univers une connexion conforme normale bien déterminée; la loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers optique, considéré comme espace non holonome conforme normal à 4 dimensions, laisse invariante une hypersphère de rayon nul (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hypersphère de rayon non nul (2me forme de la loi avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance de la loi de propagation de la lumière.

Ajoutons enfin que les deux métriques d'Univers déduites, l'une des trajectoires mécaniques, l'autre des lois de propagation de la lumière, coïncident.

VIII

Indiquons en terminant la relation qui existe entre la notion de groupe d'holonomie et la notion de classe d'un espace de Riemann. M. G. Ricci a désigné sous ce nom le plus petit entier k tel que l'espace de Riemann supposé à n dimensions puisse être réalisé par une variété convenablement choisie de l'espace euclidien à $n+k$ dimensions. M. J. A. Schouten a démontré que, dans certains cas très étendus, la classe était égale au nombre de paramètres dont dépend la position finale du corps de vecteurs issus d'un point A, transporté par parallélisme le long d'un contour fermé partant de A. Il est à peu près évident que ce nombre n'est autre que l'ordre du groupe γ qui indique comment le groupe d'holonomie g de l'espace de Riemann transforme entre elles les directions (ou les points à l'infini). Il y aurait lieu de reprendre cette question et de voir si le théorème de M. J. A. Schouten est général, ou du moins dans quels cas il est vrai.

Citons encore pour mémoire le problème général de l'isomorphisme, holoèdrique ou mériédrique, de deux espaces non holonomes à groupe fondamental donné [1].

Signalons aussi des généralisations possibles obtenues en considérant des espaces (non holonomes) *non ponctuels*, par exemple engendrés par des éléments au sens de S. Lie. C'est ainsi qu'on peut, étant donnée une équation différentielle arbitraire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

attribuer au plan (x, y), supposé initialement privé de toute propriété géométrique, une connexion projective telle que les géodésiques correspondantes soient les courbes intégrales de l'équation donnée: seulement l'élément générateur du plan ainsi doué d'une connexion projective est, non pas le point (x, y), mais l'élément $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$. On indiquerait facilement nombre d'autres problèmes d'analyse susceptibles d'être géométrisés d'une manière analogue et dans lesquels la théorie des groupes interviendrait aussi légitimement que dans les problèmes dont nous avons plus spécialement parlé.

Je ne puis enfin terminer sans signaler les remarquables recherches dans lesquelles M. H. Weyl a repris l'ancien problème philosophique de l'espace, traité autrefois par Helmholtz et Lie, pour l'adapter aux points de vue nouveaux introduits par la théorie de la relativité; la notion de groupe est, là encore, à la base même de l'énoncé du problème posé par M. H. Weyl. Mais je ne puis songer à entrer dans l'exposition, même sommaire, de cette importante question, qui exigerait à elle seule une conférence spéciale.

---

[1] Voir en particulier mon mémoire: *Les espaces à connexion conforme* (Ann. de la Soc. polon. de math., 1923, p. 171-221).