Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Autor: Streit, Dr Phil. A.

Kapitel: 8. — Produit des hauteurs.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

8. — Produit des hauteurs.

$$h' . h'' . h''' = (b \sin \gamma)(c \sin \alpha)(a \sin \beta) .$$

Mais

$$a\,b\,c = 4\mathrm{RS} \qquad \text{et} \qquad \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{\mathrm{S}}{2\mathrm{R}^2} .$$

Donc

$$h' . h'' . h''' = \frac{2\,\mathrm{S}^2}{\mathrm{R}} . \tag{26}$$

Or, en désignant les côtés du triangle des pieds des hauteurs par a_1, b_1, c_1 et son périmètre par u_1, on trouve facilement

$$a_1 = \mathrm{R} \sin (2\alpha) , \qquad b_1 = \mathrm{R} \sin (2\beta) , \qquad c_1 = \mathrm{R} \sin (2\gamma) .$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = \mathrm{R} . [\sin (2\alpha) + \sin (2\beta) + \sin (2\gamma)] .$$

$$\sin (2\alpha) + \sin (2\beta) + \sin (2\gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma .$$

Par suite

$$u_1 = \mathrm{R} . [4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma] = 4\,\mathrm{R} . \frac{\mathrm{S}}{2\mathrm{R}^2} ,$$

$$\underline{u_1 = \frac{2\,\mathrm{S}}{\mathrm{R}}} . \tag{27}$$

En tenant compte de la formule (27), la relation (26) devient

$$\underline{h' . h'' . h''' = \mathrm{S} . u_1} , \tag{28}$$

c'est-à-dire

Le produit des hauteurs d'un triangle est égal à la surface du triangle multipliée par le périmètre du triangle des pieds des hauteurs.