Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

Autor: Krawtchouk, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20675

cette égalité prendra la forme:

$$
\begin{Vmatrix}
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{vmatrix}, &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{vmatrix}, & \ldots, &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{vmatrix} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{vmatrix}, &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{vmatrix}, & \ldots, &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{vmatrix}
\end{Vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \cdots & x_{1,n+p} \\
x_{21} & \cdots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{2,n+p} \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \cdots & x_{n,n+p} \\
x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \cdots & x_{n+1,n+p} \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \cdots & x_{n+p,n+p}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & \cdots & x_{2n} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
x_{n1} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}^{p-1} .
$$

NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. Krawtchouk (Kieff).

Théorème I. *Soient* B *et* Γ *deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe* ζ; *soit de plus* n *le rapport de similitude de ces cercles*, α *leurs centres de similitude et*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ quelques points en dehors de Γ ; *alors on a,*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\beta - \alpha_{n-1}} \neq 0 \ . \qquad (1)$$

pour tout point β, intérieur de B.

Démonstration. Observons que la substitution $\zeta' = \dfrac{1}{\beta - \zeta}$, en

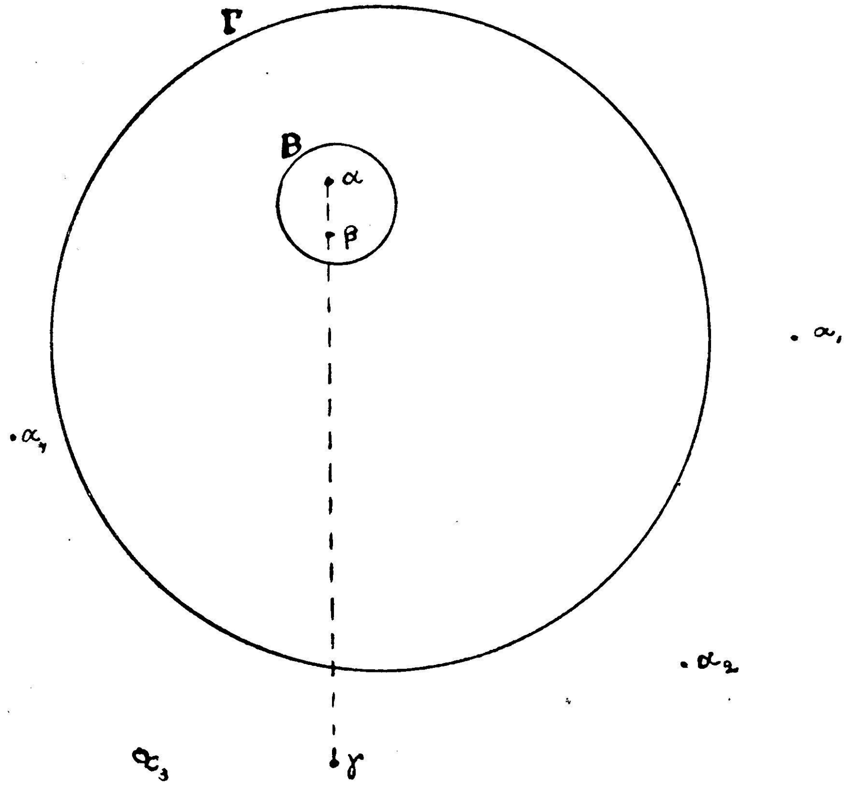

Fig. 1.

transformant Γ en un certain cercle C, remplace les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ par les points

$$a_i = \frac{1}{\beta - \alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

intérieurs de C. Alors le point

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$$

se trouve aussi à l'intérieur de c et par conséquent le point γ, déterminé par l'égalité $\alpha = \dfrac{1}{\beta - \gamma}$, est placé *en dehors* de $\mathbf{\Gamma}$.

D'autre part l'inégalité (1) est équivalente à la suivante:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}+\frac{n-1}{\beta-\gamma}\neq 0$$

ou bien à $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\neq n$. La condition contraire $\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=n\right)$ exigeant que le point γ soit *à l'intérieur* de Γ (en position semblable avec β), notre théorème est démontré. A titre d'application, posons maintenant:

$$(\beta-\alpha)(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)(\beta-\alpha_3)\ldots(\beta-\alpha_{n-1})=f(\beta)\ ,$$

alors

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}+\frac{1}{\beta-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\beta-\alpha_{n-1}}\ ,$$

d'où suit immédiatement le théorème bien connu:

THÉORÈME II. *Les racines du polynome* f'(ζ) *se trouvent à l'intérieur de chaque contour fermé convexe, contenant toutes les racines*

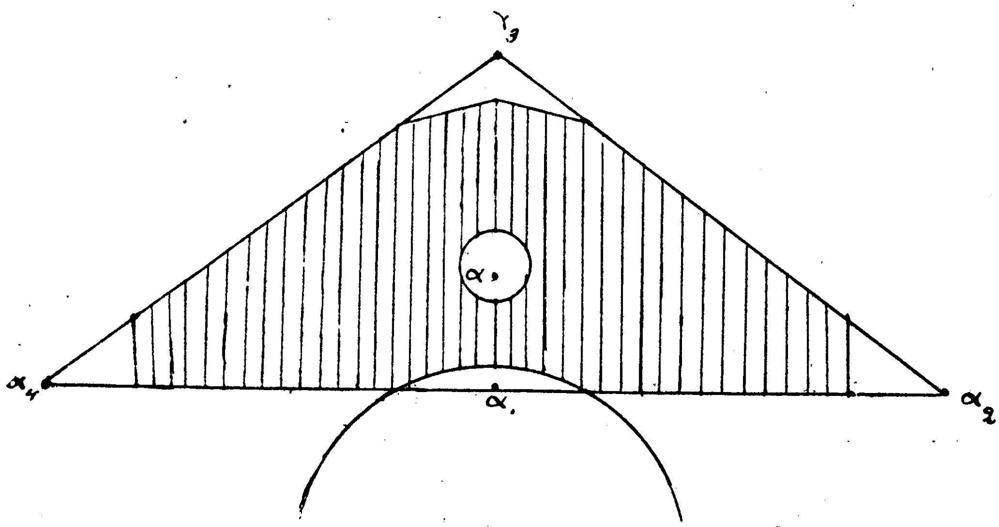

Fig. 2.

du polynome f(ζ). En ajoutant à ce théorème le théorème I, on peut encore restreindre davantage le domaine susdit des racines de $f'(\zeta)$[1]. Par exemple, en remplaçant, dans des cas particuliers,

[1] Dans cet ordre d'idées il existe plusieurs travaux de M. WALSH; voir par ex. *C. R.*, Vol. 172, et *Comptes Rendus du Congrès intern. de math., Strasbourg*, 1920.

les cercles B et Γ par des lignes droites, on arrive à la conclusion que toutes les racines de la dérivée de

$$(\zeta - \alpha)(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2)(\zeta - \alpha_3)(\zeta - \alpha_4)$$

se trouvent placées dans la partie ombrée de la figure 2.

Diverses généralisations du *Théorème I* s'imposent immédiatement.

SUR LES CLASSES ($\mathcal{L}$) DE M. FRÉCHET[1]

Note posthume de Paul URYSOHN,

rédigée par Paul ALEXANDROFF (MOSCOU).

---

1. — On entend par *une classe* ($\mathcal{L}$) un ensemble abstrait, où certaines suites dénombrables d'éléments sont déclarées *convergentes*, sous la condition que les axiomes suivants se trouvent vérifiés :

1° *Une suite convergente converge vers un seul élément, dit limite de la suite convergente.*

2° *Si quel que soit n*, $a_n = a$, *on a toujours* $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

3° *Toute suite partielle d'une suite convergente est, elle aussi, convergente : elle converge d'ailleurs vers l'élément limite de la suite entière.*

Les suites convergentes étant définies, un élément x de la classe ($\mathcal{L}$) donnée s'appelle *élément d'accumulation* d'un ensemble M (situé dans cette classe), s'il existe au moins une suite

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad x_n \neq x \ \text{(quel que soit } n) \tag{1}$$

d'éléments de M, qui converge vers x.

Toutes les notions élémentaires de la théorie des ensembles s'introduisent alors comme d'habitude. En particulier, nous

---

[1] M. FRÉCHET, Thèse (*Rend. Palermo*, t. 22, 1906).