

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1926)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES  
DÉRIVÉS  
**Autor:** Krawtchouk, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20675>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

cette égalité prendra la forme:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{cccccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \dots & x_{1,n+p} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \dots & x_{2,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \dots & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \dots & x_{n+1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \dots & x_{n+p,n+p} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{array} \right|^{p-1}
 \end{array}$$

## NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

THÉORÈME I. Soient  $B$  et  $\Gamma$  deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe  $\zeta$ ; soit de plus  $n$  le rapport de similitude de ces cercles,  $\alpha$  leurs centres de similitude et

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  quelques points en dehors de  $\Gamma$ ; alors on a,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{\beta - \alpha_{n-1}} \neq 0 . \quad (1)$$

pour tout point  $\beta$ , intérieur de B.

Démonstration. Observons que la substitution  $\zeta' = \frac{1}{\beta - \zeta}$ , en

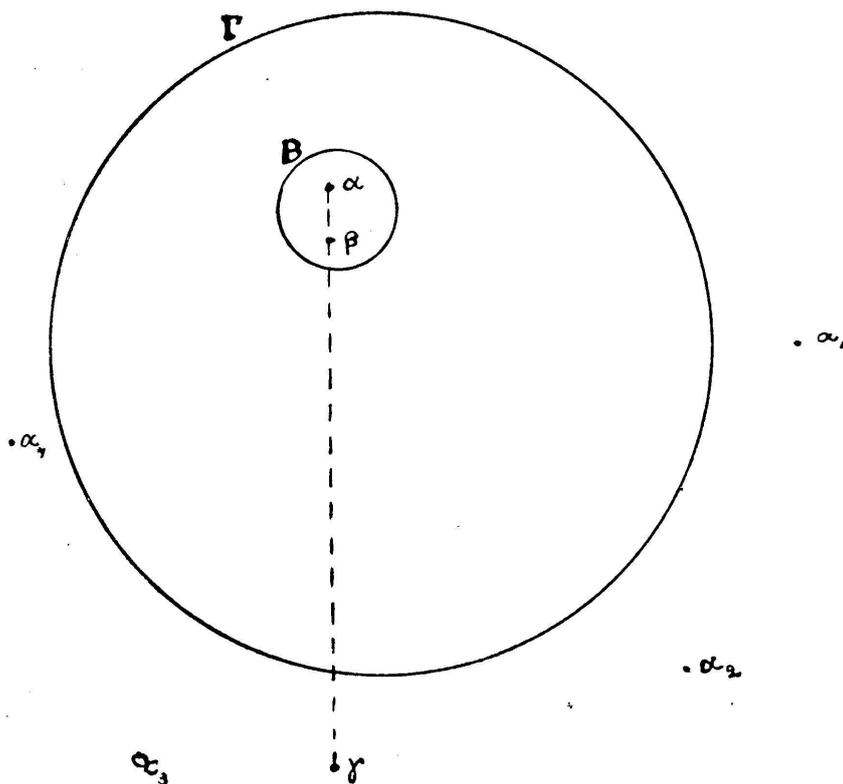


Fig. 1.

transformant  $\Gamma$  en un certain cercle C, remplace les points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  par les points

$$a_i = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1)$$

intérieurs de C. Alors le point

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n - 1}$$

se trouve aussi à l'intérieur de c et par conséquent le point  $\gamma$ , déterminé par l'égalité  $\alpha = \frac{1}{\beta - \gamma}$ , est placé en dehors de  $\Gamma$ .

D'autre part l'inégalité (1) est équivalente à la suivante:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{n-1}{\beta - \gamma} \neq 0$$

ou bien à  $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \neq n$ . La condition contraire  $\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = n\right)$  exigeant que le point  $\gamma$  soit à l'intérieur de  $\Gamma$  (en position semblable avec  $\beta$ ), notre théorème est démontré. A titre d'application, posons maintenant:

$$(\beta - \alpha)(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)(\beta - \alpha_3) \dots (\beta - \alpha_{n-1}) = f(\beta),$$

alors

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{\beta - \alpha_{n-1}},$$

d'où suit immédiatement le théorème bien connu:

**THÉORÈME II.** *Les racines du polynome  $f'(\zeta)$  se trouvent à l'intérieur de chaque contour fermé convexe, contenant toutes les racines*

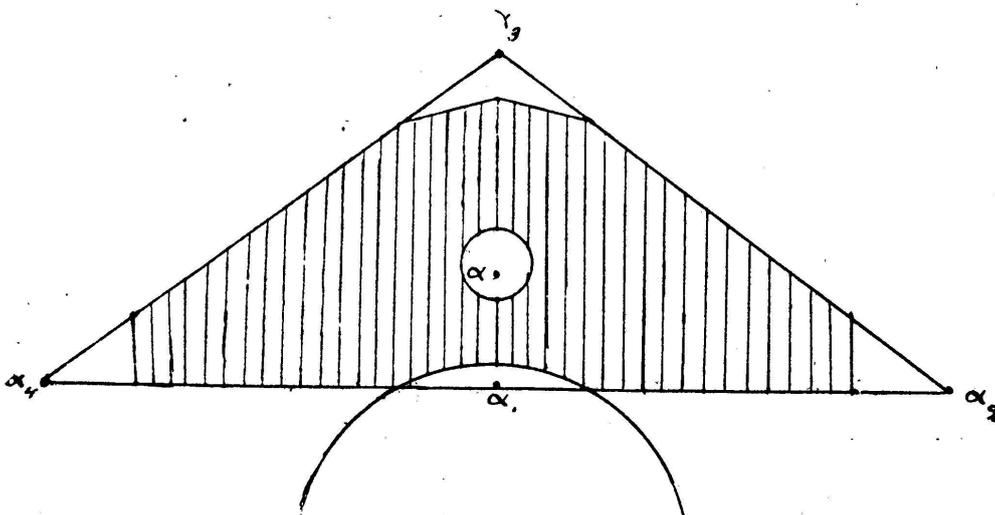


Fig. 2.

du polynome  $f(\zeta)$ . En ajoutant à ce théorème le théorème I, on peut encore restreindre davantage le domaine susdit des racines de  $f'(\zeta)$ <sup>1</sup>. Par exemple, en remplaçant, dans des cas particuliers,

<sup>1</sup> Dans cet ordre d'idées il existe plusieurs travaux de M. WALSH; voir par ex. C. R., Vol. 172, et *Comptes Rendus du Congrès intern. de math., Strasbourg, 1920.*

les cercles B et  $\Gamma$  par des lignes droites, on arrive à la conclusion que toutes les racines de la dérivée de

$$(\zeta - \alpha)(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2)(\zeta - \alpha_3)(\zeta - \alpha_4)$$

se trouvent placées dans la partie ombrée de la figure 2.

Diverses généralisations du *Théorème I* s'imposent immédiatement.

## SUR LES CLASSES ( $\mathcal{L}$ ) DE M. FRÉCHET <sup>1</sup>

Note posthume de Paul URYSOHN,

rédigée par Paul ALEXANDROFF (MOSCOU).

1. — On entend par *une classe* ( $\mathcal{L}$ ) un ensemble abstrait, où certaines suites dénombrables d'éléments sont déclarées *convergentes*, sous la condition que les axiomes suivants se trouvent vérifiés :

1° *Une suite convergente converge vers un seul élément, dit limite de la suite convergente.*

2° *Si quel que soit  $n$ ,  $a_n = a$ , on a toujours  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .*

3° *Toute suite partielle d'une suite convergente est, elle aussi, convergente : elle converge d'ailleurs vers l'élément limite de la suite entière.*

Les suites convergentes étant définies, un élément  $x$  de la classe ( $\mathcal{L}$ ) donnée s'appelle *élément d'accumulation* d'un ensemble M (situé dans cette classe), s'il existe au moins une suite

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \quad x_n \neq x \quad (\text{quel que soit } n) \quad (1)$$

d'éléments de M, qui converge vers  $x$ .

Toutes les notions élémentaires de la théorie des ensembles s'introduisent alors comme d'habitude. En particulier, nous

<sup>1</sup> M. FRÉCHET, Thèse (*Rend. Palermo*, t. 22, 1906).