

# SUR UNE NOUVELLE ET IMPORTANTE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE

Autor(en): **Bloch, André**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21247>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'intégrale générale

$$2x^2 - 3xy + \lambda y^2 - y - 2 = 0$$

se compose de coniques qui admettent toutes les deux éléments (1, 0, 1) et (-1, 0, 2), à l'exception de l'intégrale  $y = 0$  ( $\lambda$  infini); les deux éléments (1, 0, 0) et (-1, 0, 0) appartiennent à cette intégrale; enfin les deux éléments (-3, -4, 1) et (-3, -4, 2) correspondent au point commun aux deux droites en lesquelles dégénère la conique pour  $\lambda = 1$ .

---

## SUR UNE NOUVELLE ET IMPORTANTE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE

PAR

André BLOCH (Paris).

---

1. — Dans une Note remarquable<sup>1</sup>, qui resta malheureusement sans continuation, M. G. GIRAUD a établi qu'une certaine fonction, déduite d'un système de fonctions hyperfuchsiennes, et qui constitue un invariant différentiel de ce système par rapport à l'hypersphère fondamentale, satisfait à l'équation aux dérivées partielles:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2 = e^u.$$

Cette équation présente une analogie parfaite avec l'équation bien connue  $\Delta u = e^u$  de la théorie des fonctions fuchsiennes.

L'expression qui figure au premier membre est extrêmement intéressante; nous l'appellerons *double laplacien* de la fonction  $u$

---

<sup>1</sup> Sur une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du second ordre, se rattachant à la théorie des fonctions hyperfuchsiennes (*Comptes Rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 166, 1918, p. 893).

des quatre variables réelles  $x, y, z, t$ , associées deux à deux, et nous la désignerons par  $\Delta\Delta u$ . L'objet du présent article est l'étude sommaire des propriétés des fonctions satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0. \quad (L)$$

En posant:  $x + iy = X$ ,  $z + it = Y$  et désignant selon l'usage par  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  les imaginaires conjuguées de  $X$ ,  $Y$ ,  $u$  devient une certaine fonction de  $X, Y, \bar{X}, \bar{Y}$ , et l'on a:

$$\Delta\Delta u = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{X}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} \end{vmatrix}.$$

Ceci suggère immédiatement une extension au cas d'un nombre pair quelconque  $2n$  de variables réelles  $x, y, z, t, \dots, \omega, r$  associées deux à deux: en posant  $x + iy = X$ ,  $z + it = Y$ ,  $\dots$ ,  $\omega + ir = V$ , on pourra considérer  $2n$  nouvelles variables  $X, Y, \dots, V, \bar{X}, \bar{Y}, \dots, \bar{V}$ , imaginaires conjuguées deux à deux; le laplacien  $n^{\text{uple}}$  d'une fonction sera le déterminant d'ordre  $n$  de ses  $n^2$  dérivées secondes par rapport à ces nouvelles variables, déterminant dont la diagonale principale est formée d'éléments réels tandis que les éléments symétriques par rapport à cette diagonale sont imaginaires conjugués. Mais nous nous bornerons au cas d'une fonction de quatre variables réelles  $x, y, z, t$  (soient deux variables complexes  $X, Y$ .)

2. — Nous allons donner au sujet du double laplacien et des fonctions satisfaisant à l'équation (L) divers théorèmes dont l'exactitude ne semble pas pouvoir faire de doute, bien que pour certains d'entre eux nous n'ayons obtenu qu'une démonstration partielle.

Avec les notations employées plus haut, la partie réelle  $u$  d'une fonction analytique de  $X$  et  $Y$  satisfait, comme on sait, aux équations:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

et par suite à l'équation (L) dont elle est en quelque sorte solution double. De plus:

THÉORÈME I. — *Le double laplacien d'une fonction n'est pas altéré par l'addition d'une partie réelle de fonction analytique.*

L'équation (L) est d'ailleurs vérifiée par une fonction quelconque de  $x$  et  $y$ , une fonction quelconque de  $z$  et  $t$ .

THÉORÈME II. — *La fonction  $\log (aXX + \bar{b}X\bar{Y} + \bar{b}\bar{X}Y + cY\bar{Y})$  satisfait à l'équation (L).*

$a$  et  $c$  sont naturellement supposés réels; le cas intéressant est celui d'un hermitien défini ( $ac - \bar{b}\bar{b} < 0$ ).

THÉORÈME III. — *Par un changement de variables analytique  $X = \varphi(X', Y')$ ,  $Y = \psi(X', Y')$  le double laplacien d'une fonction se reproduit multiplié par le carré de la valeur absolue du jacobien  $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(X', Y')}$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(X', Y')} \frac{\partial(\bar{X}, \bar{Y})}{\partial(\bar{X}', \bar{Y}'})$ .*

La propriété d'une fonction de satisfaire à l'équation (L) se conserve donc par un changement de variables.

THÉORÈME IV. — *Etant donnée une fonction satisfaisant à l'équation (L), il existe une famille de courbes  $f(X, Y, \lambda) = 0$ , dépendant d'un paramètre complexe  $\lambda$  (donc de deux paramètres réels) le long de chacune desquelles la fonction se réduit à la partie réelle d'une fonction analytique de  $X$  ou  $Y$ .*

Ainsi pour la fonction  $\log (aX\bar{X} + bX\bar{Y} + \bar{b}\bar{X}Y + cY\bar{Y})$ , la famille de courbes en question est celle des droites  $Y = \lambda X$ . Si dans le logarithme, on fait le changement de variables  $X = \varphi(X', Y')$ ,  $Y = \psi(X', Y')$ , la famille des courbes est:  $\psi(X', Y') = \lambda\varphi(X', Y')$ .

Il convient d'observer qu'une fonction  $u$  qui sur chacune des courbes d'une famille  $f(X, Y, \lambda) = 0$  se réduit à la partie réelle d'une fonction analytique de  $X$  ou  $Y$  ne satisfait pas nécessairement à l'équation (L); deux autres conditions doivent être remplies. En effet, l'on peut, à l'aide d'un changement de variables auxiliaire, supposer que la famille soit celle des droites  $X = \mu$ ; on a alors:  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ ; pour que l'équation (L) soit vérifiée, l'on doit avoir en outre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Il est à peine utile de remarquer que ces trois égalités supposées vérifiées identiquement n'entraînent nullement que l'on ait aussi  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ; c'est ce qui résulte de la considération des variables  $X, Y, \bar{X}, \bar{Y}$ ; d'ailleurs, si cela était exact, toute fonction satisfaisant à l'équation (L) serait, d'après ce qui précède la partie réelle d'une fonction analytique de  $X$  et  $Y$ , conséquence absurde.

THÉORÈME V. — *Une fonction satisfaisant à l'équation (L) n'a ni maximum au sens strict, ni minimum au sens strict.*

Autrement dit, il n'existe aucun point  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  dans tout le voisinage duquel on ait soit  $u(x, y, z, t) < u(x_0, y_0, z_0, t_0)$  soit  $u(x, y, z, t) > u(x_0, y_0, z_0, t_0)$  (égalité exclue).

Dans la démonstration partielle que nous avons obtenue de ce théorème s'est rencontrée la proposition suivante, qui s'établit aisément, toujours par la considération des variables  $X, Y$ :

Soit

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

une forme quadratique non négative dont les coefficients sont liés par la relation

$$(a_{11} + a_{22})(a_{33} + a_{44}) - (a_{13} + a_{24})^2 - (a_{14} - a_{23})^2 = 0.$$

Une telle forme se réduit nécessairement à la somme de deux carrés (ou à un seul carré); autrement dit son discriminant est nul et a tous ses premiers mineurs nuls.

THÉORÈME VI. — *Si une fonction  $u$  est telle que tous les déterminants du second ordre tirés des deux matrices*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{X}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} & \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{X}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} \end{vmatrix}$$

soient nuls, cette propriété se conserve par tout changement de variables analytique effectué sur  $X$  et  $Y$ ; elle signifie que la fonction  $u$  est constante sur chacune des courbes d'une famille à un paramètre complexe  $f(X, Y, \lambda) = 0$ .

L'énoncé précédent impose à la fonction  $u$ , outre la condition de satisfaire à l'équation (L), deux autres conditions; la signification de l'ensemble des trois conditions est la suivante: l'hermitien non homogène dont les neuf coefficients sont les huit dérivées partielles et un terme constant quelconque est, par un changement linéaire de variables, réductible à la forme  $AV\bar{V} + B$ . Car ce dernier fait s'exprime par les deux égalités:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{X}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{X}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} & \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} & 0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

multipliant la seconde par  $\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}}$  et tenant compte de la première, il vient:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} - \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \right) = 0 ,$$

et, les deux facteurs étant imaginaires conjugués, tous deux doivent être nuls.

THÉORÈME VII. — *Une fonction satisfaisant à l'équation (L), mais ne rentrant pas dans la catégorie particulière du théorème précédent, n'a ni maximum au sens large, ni minimum au sens large.*

Autrement dit, dans le voisinage de tout point  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  il existe des points  $(x, y, z, t)$  satisfaisant à l'inégalité  $u(x, y, z, t) < u(x_0, y_0, z_0, t_0)$  et d'autres satisfaisant à l'inégalité inverse  $u(x, y, z, t) > u(x_0, y_0, z_0, t_0)$ .

3. — Si dans la fonction  $\log(X\bar{X} + Y\bar{Y})$  nous faisons le changement de variables  $X = \varphi(X', Y')$ ,  $Y = \psi(X', Y')$ , les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  étant méromorphes dans une certaine région, nous obtenons une fonction  $u(X', Y', \bar{X}', \bar{Y}')$ , satisfaisant à l'équation (L); cette fonction  $u$  rentre ou non dans la catégorie du théorème VI suivant que  $\varphi$  et  $\psi$  sont dépendantes ou indépendantes.

Donc (écrivant à nouveau  $X$  et  $Y$  au lieu de  $X'$  et  $Y'$ ) dans une région où  $\varphi(X, Y)$  et  $\psi(X, Y)$ , indépendantes, sont méromorphes, la fonction  $\log [\varphi(X, Y) \overline{\varphi}(\overline{X}, \overline{Y}) + \psi(X, Y) \overline{\psi}(\overline{X}, \overline{Y})]$  n'a, même au sens large, ni maximum ni minimum, en dehors de ses infinis.

C'est là un fait que la théorie des fonctions de deux variables complexes permettait de prévoir; car un théorème d'importance fondamentale dans ce corps de doctrine est le suivant, d'où le fait dont il s'agit résulte sur-le-champ:

*Si un système de deux fonctions indépendantes de deux variables, méromorphes dans un domaine, s'annule à l'intérieur, il atteint dans le même domaine tous les points d'une certaine hypersphère centrée à l'origine, de rayon non nul.*

Le théorème analogue pour une fonction d'une variable est bien connu, ainsi que le cas particulier du théorème en question où les deux fonctions sont holomorphes au point considéré avec un jacobien non nul<sup>1</sup>; mais nous ne saurions dire si le théorème actuel a déjà été établi dans toute sa généralité<sup>2</sup>.

Indiquons sommairement comment on pourra l'établir. Tout d'abord on peut se borner au cas des fonctions holomorphes; car si le point considéré est un point d'indétermination, où l'on a une infinité de systèmes de valeurs parmi lesquels celui considéré, on fera disparaître l'indétermination par une transformation de Cremona appropriée. Il s'agit donc d'établir le théorème d'inversion pour deux fonctions holomorphes indépendantes, dans le voisinage d'un point où le jacobien est nul; or son établissement pour deux polynômes indépendants est une question d'algèbre, et nous pouvons le supposer obtenu dans ce cas; alors, en ne considérant dans les développements tayloriens des deux fonctions que les termes de degré inférieur ou égal à  $N$ , nous aurons pour une valeur assez grande de  $N$ , deux polynômes indépendants, et en opérant à partir des  $n$  solutions réalisant l'inversion de ce système de polynômes, comme on fait dans

<sup>1</sup> Pour ces diverses propositions, voir par exemple E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tome II, chap. XVII.

<sup>2</sup> Voir pour tous renseignements bibliographiques, L. BIEBERBACH, *Encycl. d. math. Wiss.*, II. C. 4, p. 530-532; l'expression du nombre  $n$  des solutions voisines donnée p. 530 n'est exacte que dans un cas particulier.

le cas d'une variable ou d'un jacobien non nul, nous obtiendrons l'inversion du système de fonctions considéré.

Dans l'énoncé du théorème VII et dans tout le début du présent numéro, nous sommes restés placés au point de vue local; nous allons maintenant faire un pas de plus et nous placer au point de vue global. Mais, pour plus de généralité — d'une manière plus précise pour avoir le droit d'envisager ultérieurement deux fonctions méromorphes et non seulement deux fonctions entières — il convient d'élargir un peu, sur un certain point, les considérations développées jusqu'ici. La fonction  $u$  satisfaisant à l'équation (L) était supposée jusqu'à présent finie; mais la simple considération d'une partie réelle de fonction méromorphe de deux variables, ou bien de  $\log (X\bar{X} + Y\bar{Y})$  où  $X$  et  $Y$  sont deux telles fonctions supposées indépendantes prouve qu'il peut y avoir intérêt à admettre qu'elle puisse être infinie en certains points isolés et le long de certaines courbes analytiques<sup>1</sup> et même posséder certains points d'indétermination isolés dans le voisinage desquels elle prenne toutes les valeurs supérieures ou inférieures à un certain nombre (dans certains cas toutes les valeurs sans exception).

Or, observons que la démonstration complète du théorème VII pourra certainement se faire à l'aide d'une formule en termes finis, analogue à la formule de la moyenne de Gauss et à l'intégrale de Poisson; la proposition suivante apparaît dès lors comme certaine:

*Une fonction satisfaisant à l'équation (L), existant pour tout système de valeurs finies de  $x, y, z, t$ , pouvant d'ailleurs devenir infinie ou indéterminée, ne rentrant pas dans la catégorie particulière du théorème VI, prend nécessairement toute valeur finie.*

Il résulte de là, grâce à la considération de notre logarithme:

*Un système de deux fonctions indépendantes de deux variables, partout méromorphes à distance finie, s'approche indéfiniment de tout système de valeurs.*

Dans deux Notes insérées aux *Comptes Rendus*<sup>2</sup>, M. Fatou

<sup>1</sup> S'il est exact que les infinis ne puissent être situés que sur une courbe analytique  $g(X, Y) = 0$  la démonstration en sera probablement analogue à celle du même énoncé pour les pôles d'une fonction méromorphe de deux variables.

<sup>2</sup> C. R. de l'Acad. des Sc., tome 175 (1922), p. 862 et p. 1030.



avait cru établir le contraire. Mais ces Notes, d'un exposé peu clair, reposant d'ailleurs sur la considération de fonctions passablement hypothétiques de M. Picard, ne pouvaient visiblement être prises au sérieux. Elles le pouvaient d'autant moins que leur auteur, loin de s'inquiéter d'un résultat alarmant qui, s'il eût été vrai, eût complètement bouleversé la théorie des fonctions analytiques, semblait en éprouver une certaine satisfaction.

4. — Nous allons maintenant dire quelques mots du problème de Dirichlet pour l'équation (L). Il est clair d'après les numéros précédents que sa résolution même partielle sera d'un grand secours dans l'étude des fonctions satisfaisant à cette équation, de même que les égalités de Gauss et de Poisson facilitent considérablement l'étude des fonctions harmoniques.

Remarquons que l'équation  $\Delta\Delta u = 0$  est visiblement avec celle  $rt - s^2 = 0$  des surfaces développables dans le même rapport que l'équation  $\Delta u = 0$  avec celle  $y'' = 0$  des droites du plan. Cette analogie des fonctions satisfaisant à l'équation (L) avec la troisième coordonnée d'un point décrivant une surface développable peut nous donner d'utiles indications. Aux différentes sortes de surfaces développables (cônes, cylindres, etc.) correspondront différentes sortes de fonctions satisfaisant à l'équation (L). Il pourra y avoir intérêt à trouver une expression générale des fonctions satisfaisant à l'équation (L) analogue à l'expression des coordonnées d'un point d'une surface développable à l'aide de l'arête de rebroussement. D'autre part, les différents théorèmes du n° 2 correspondent tous à des propriétés évidentes des surfaces développables; en particulier aux parties réelles de fonctions analytiques de  $X$  et  $Y$  et aux fonctions particulières du théorème VI correspondent respectivement les plans de l'espace à trois dimensions et les cylindres de génératrices parallèles au plan des  $x y$ .

Considérons une biquadratique gauche à une seule branche: il passe par elle deux cônes réels; nous pouvons d'ailleurs supposer que la branche soit une simple boucle située à distance finie; une telle boucle a des propriétés topologiques simples, et possède en particulier quatre plans osculateurs stationnaires;

une boucle topologiquement semblable à la précédente (sans qu'il soit ici nécessaire de préciser parfaitement ce qu'il convient d'entendre par là) sera située, non plus sur deux cônes, mais du moins sur deux développables, distinctes si la boucle est réellement gauche.

Or, le problème analogue au problème de Dirichlet pour l'équation (L) est le suivant: une boucle étant donnée dans l'espace, se projetant sur le plan des  $xy$  suivant une courbe simple, trouver une portion de surface développable ayant la boucle pour contour, et coupée en un seul point par les parallèles à l'axe des  $z$ . Il résulte de ce qui précède que si la boucle est assimilable à une biquadratique gauche, elle-même presque dans un plan, ce problème aura deux solutions distinctes. Mais si la boucle, se projetant toujours sur le plan des  $xy$  suivant une courbe simple, et demeurant voisine d'une courbe plane, a une forme plus sinueuse, possède, par exemple, deux plans tritangents, les choses se compliquent: il y aura plus de deux développables. En tout cas, rien n'empêche de partir de la démonstration du fait qu'une fonction de  $x$  et  $y$  se réduisant le long d'un certain contour simple à une fonction linéaire de  $x$  et  $y$ , et satisfaisant à l'intérieur à l'équation  $rt - s^2 = 0$ , coïncide avec cette fonction linéaire, pour obtenir une relation entre les valeurs sur un contour simple d'une fonction satisfaisant à  $rt - s^2 = 0$  et ses valeurs à l'intérieur du même contour.

Passons au problème de Dirichlet pour l'équation (L). S'il est exact que la surface développable terminée à une boucle soit la surface réglée d'aire minimum, on pourra songer à le résoudre par la considération du minimum d'une intégrale multiple. Mais dans cet examen très sommaire, nous voulons nous borner au cas où le continuum-frontière est une hypersphère  $X\bar{X} + Y\bar{Y} = 1$ . Si la suite des valeurs données sur l'hypersphère sont celles de la partie réelle d'une fonction analytique de  $X$  et  $Y$ , holomorphe à l'intérieur, le problème de Dirichlet n'aura qu'une solution, cette partie réelle elle-même; un problème préliminaire (peut-être déjà résolu) sera donc celui de trouver les conditions pour qu'une fonction donnée en tout point d'une hypersphère y coïncide avec la partie réelle d'une

fonction holomorphe à l'intérieur. Pour le cas général où les données ne satisfont à aucune relation d'égalité particulière, nous pouvons visiblement énoncer ce qui suit :

*Si l'on donne sur l'hypersphère une succession de valeurs voisines de celles de la partie réelle d'une fonction holomorphe à l'intérieur, et ne s'en écartant que suivant une loi suffisamment simple, le problème de Dirichlet pour l'équation (L), correspondant à cette succession, a deux solutions distinctes si les valeurs données ne sont pas précisément celles d'une partie réelle de fonction holomorphe.*

C'est là tout ce qu'il paraît possible d'affirmer; encore conviendrait-il de préciser ce qu'il faut entendre par « loi suffisamment simple ». Il est vraisemblable que le discriminant de l'équation du second degré dont dépendra la valeur de la fonction en un point quelconque sera une somme de carrés, qui ne seront nuls que si les valeurs données sont celles d'une partie réelle.

Une proposition plus générale a-t-elle lieu? Le problème de Dirichlet pour une hypersphère admet-il deux solutions dans tous les cas? Nous ne pouvons émettre aucune présomption à ce sujet. Pour résoudre la question, il y aura lieu de commencer par faire le calcul indiqué plus haut relatif à l'équation  $rt - s^2$ ; il n'est pas impossible qu'il se présente plus simplement que ne pouvaient le faire prévoir les complications signalées à propos des surfaces développables. Et, quoi qu'il en soit de ce dernier point, si l'on considère que pour une fonction quelconque définie à l'intérieur du cercle C d'équation  $x^2 + y^2 = R^2$ , on a ( $s$  étant l'arc de ce cercle et  $r$  égal à  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ), l'égalité :

$$V(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_C V ds + \frac{1}{2\pi} \int_C \int_C \log \frac{r}{R} \Delta V dx dy$$

on peut juger possible qu'une égalité analogue — dont alors par transformation homographique résulterait la solution du problème de Dirichlet pour l'hypersphère — ait lieu pour cette dernière variété et le double laplacien. Si cela est vrai, la plupart des questions qu'il n'a été possible d'examiner que sommairement au cours du présent article se trouveront résolues de la manière la plus brillante et la plus complète.

Nous n'osons l'espérer, de crainte que cet espoir ne soit déçu. Il est à souhaiter en tout cas que la théorie actuelle, dont on n'a ici qu'une esquisse fort imparfaite, soit établie sur des bases solides et perfectionnée sous bien des rapports.

5. — Dans sa conférence classique du Congrès de Rome (1908) sur *L'Avenir des Mathématiques*, Henri POINCARÉ, au sujet de la théorie des fonctions posait entre autres les questions suivantes :

« Pourquoi la représentation conforme est-elle le plus souvent impossible dans un domaine à quatre dimensions et que faut-il mettre à la place ? La véritable généralisation des fonctions à une variable n'est-elle pas dans les fonctions harmoniques à quatre variables, dont les parties réelles des fonctions de deux variables ne sont que des cas particuliers ? »

Il n'a pas été question dans le présent article du problème de la représentation conforme dans l'espace à quatre dimensions, qui est d'ailleurs loin d'être résolu ; si ce problème préoccupait Poincaré — qui lui avait consacré en 1907 un mémoire inséré aux *Acta Mathematica* — ce n'était pas seulement à cause de son intérêt propre, c'était aussi en raison de son application possible au problème de l'uniformisation des surfaces (duquel il parle d'ailleurs quelques lignes plus loin dans sa conférence de Rome). Or, pour cette dernière question, il est permis dès à présent de prévoir que l'équation de M. Giraud  $\Delta\Delta u = e^u$  jouera un rôle de premier plan ; et le problème de son intégration sur les surfaces algébriques dont le genre d'ordre douze dépasse l'unité paraît d'une haute importance.

Quant à la seconde question posée par Poincaré, l'article actuel, si insuffisant soit-il, y répond directement. Poincaré prévoyait bien qu'une certaine catégorie de fonctions de quatre variables réelles devait jouir de propriétés particulières par rapport à la théorie des fonctions de deux variables complexes ; mais les fonctions harmoniques de quatre variables sont sans intérêt à ce point de vue, et les fonctions qu'il cherchait ne sont autres que les solutions de l'équation (L), comme il s'en serait sans doute aperçu s'il s'était à nouveau occupé du sujet.

Il est donc probable que l'article actuel aurait intéressé Henri Poincaré.

## ADDENDUM

1° La démonstration complète des propriétés énoncées dans le présent article prouvera sans doute par elle-même que toute fonction satisfaisant à l'équation (L), ne rentrant pas dans la catégorie particulière du théorème VI, est une fonction analytique de  $x, y, z, t$ .

2° L'expression

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} - \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{X} \partial Y} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \bar{X}},$$

dont il a été question au sujet du théorème VI, jouit de la même invariance que  $\Delta\Delta u$  par rapport aux transformations analytiques de  $X$  et  $Y$ . Son annulation a la signification suivante: par tout point  $(X, Y)$  il passe une courbe analytique sur laquelle  $u$  est constant. Ces courbes dépendent de deux paramètres réels, mais non d'un paramètre complexe si  $\Delta\Delta u$  n'est pas nul.

---

LES FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLE,  
LES FONCTIONS DE POINT A VARIATION BORNÉE  
ET LA GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE  
A  $n$  DIMENSIONS

PAR

R. C. YOUNG (Cambridge).

---

1. — A la fin du Chapitre VI de sa monographie: « Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire », M. de la Vallée Poussin établit la proposition suivante, sous l'hypothèse d'un nombre quelconque, soit  $n$ , de dimensions:

Toute fonction de point  $f(P)$ , qui est continue et à variation bornée, définit une fonction  $p(e)$ , continue et additive, d'en-