SUR UNE FORMULE DE M. DE MONTESSUS DE BALLORE ET LES COURBES BINOMIALES

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21257

SUR UNE FORMULE DE M. DE MONTESSUS DE BALLORE ET LES COURBES BINOMIALES

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Dans un mémoire récent [1] M. de Montessus de Ballore a fait connaître des formules intéressantes permettant de simplifier considérablement le calcul des valeurs moyennes (valeurs probables) des différentes puissances de l'écart dans les épreuves répétées.

Supposons qu'on envisage s épreuves comportant deux événements contradictoires A et B de probabilités constantes p et q. La probabilité $\mathrm{T}(x)$ pour que le nombre de réalisations de A, au cours de ces s épreuves, soit égal à x, est donnée, comme on sait, par la formule

$$\mathrm{T}(x) = \frac{s\,!}{x\,!\,(s-x)\,!}\,p^x q^{s-x}\,, \tag{1}$$

en convenant de remplacer 0 ! par l'unité.

Si l'on pose $x = sp + l$, où l est l'écart correspondant, on a, en désignant par $\mathrm{T}_l = \mathrm{T}(x)$ la probabilité d'un écart $= l$,

$$\mathrm{T}_l = \frac{s\,!}{(sp+l)\,!\,(sq-l)\,!}\,p^{sp+l} q^{sq-l}\,. \tag{2}$$

Partons, avec M. de Montessus de Ballore, de l'identité

$$p\,(sq-l)\,\mathrm{T}_l - q\,(sp+l+1)\,\mathrm{T}_{l+1} = 0\,. \tag{3}$$

(Pour passer des notations de M. de Montessus de Ballore aux miennes, il suffit de remplacer y par T, m par s, x par $-l$).

---

[1] R. DE MONTESSUS DE BALLORE. La formule fondamentale de la Statistique, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2$^{\text{me}}$ partie, Mémoires, 1927, p. 103-115.

Soient l_1 et l_2 deux valeurs de l vérifiant l'inégalité $l_1 < l_2$ et comprises dans l'intervalle $(-sp, sq)$. Faisons dans (3) $l = l_1, l_1 + 1, \dots l_2$ et ajoutons. On obtient, après quelques simplifications, la formule

$$\sum_{l_1}^{l_2} l\mathrm{T}_l = spq(\mathrm{T}_{l_1} - \mathrm{T}_{l_2}) + ql_1\mathrm{T}_{l_1} + pl_2\mathrm{T}_{l_2}\,, \tag{4}$$

qui n'est qu'une généralisation banale de la formule (10) du mémoire cité (p. 107). Elle est encore vraie pour $l_1 = -sp - 1$ et $l_2 = sq + 1$, pourvu qu'on pose $\mathrm{T}_{-sp-1} = \mathrm{T}_{sq+1} = 0$.

J'ai été conduit à généraliser la formule (10) d'une manière différente dans une étude que j'ai faite récemment des courbes binomiales.

M'écartant légèrement de la terminologie usuelle [1], j'entends par courbes binomiales les courbes définies par une équation de la forme

$$y = \frac{s\,!}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(s-x+1)}\,p^x q^{s-x}\,, \tag{5}$$

p et q étant deux nombres positifs liés par la relation $p + q = 1$ et s un nombre entier positif ou nul.

Aux valeurs entières et non négatives de $x \leqq s$ correspondent les termes du binôme $(q + p)^s$.

On voit immédiatement que y s'annule pour x entier et négatif et pour $x = s + k$, où k est un entier quelconque $\geqq 1$. Les zéros de y déterminent sur l'axe $x'\,x$ une suite infinie d'intervalles: l'intervalle $(-1, s + 1)$, que j'appellerai intervalle central, le long duquel y est positive, et une infinité d'autres intervalles de longueur 1, sur lesquels y est alternativement positive et négative. Lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, la courbe (5) est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{s}{2}$.

On peut montrer que, dans l'intervalle central, l'ordonnée y est une fonction croissante de x pour $x \leqq sp - q$; elle est décroissante pour $x \geqq sp + p$.

[1] E. Borel. *Le Hasard*, 3me édition, p. 138, Félix Alcan, Paris, 1914.

A propos de mon article « Sur une formule de M. de Montessus de Ballore et les courbes binomiales ». (*L'Enseignement mathématique*, 26e année, 1927, p. 287-293.)

Cet article était sous presse, lorsque j'ai appris que les formules indiquées par M. de Montessus de Ballore dans son mémoire des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* dont il est question au début de mon travail, avaient déjà été données, sous une forme un peu différente il est vrai, par M. Ragnar FRISCH en 1924 et 1925 (v. *Biometrika*, 1925, p. 170). L'analyse de M. Frisch est très élégante, mais celle de M. de Montessus de Ballore me paraît particulièrement simple et naturelle.

Genève, 12 avril 1928. D. MIRIMANOFF.

vide-leer-empty

Introduisons maintenant l'écart $l = x - sp$. Ici l est un nombre réel quelconque positif, nul ou négatif. Je désignerai par y_l l'ordonnée y envisagée comme fonction de l. On a donc

$$y_l = \frac{s\,!}{\Gamma(sp + l + 1)\,\Gamma(sq - l + 1)}\, p^{sp+l} q^{sq-l} . \tag{6}$$

Les ordonnées y_l et y_{l+1} sont encore liées par la relation (3) qui s'écrit

$$p(sq - l)y_l - q(sp + l + 1)y_{l+1} = 0 . \tag{7}$$

Soient encore l_1 et l_2 deux nombres vérifiant l'inégalité $l_1 < l_2$ (pour fixer les idées, nous supposerons que l_1 et l_2 appartiennent à l'intervalle central).

Intégrons (7) entre $l = l_1$ et $l = l_2 - 1$. On obtient, après quelques simplifications, la formule suivante

$$\int_{l_1}^{l_2} l y_l \, dl = spq \left\{ \int_{l_1}^{l_1+1} y_l \, dl - \int_{l_2-1}^{l_2} y_l \, dl \right\} + q \int_{l_1}^{l_1+1} l y_l \, dl + p \int_{l_2-1}^{l_2} l y_l \, dl , \tag{8}$$

analogue à la formule (4).

C'est la formule (8) qui va nous permettre d'établir une propriété curieuse des courbes binomiales, que je crois nouvelle.

Inscrivons dans la partie centrale de la courbe la ligne polygonale dont les sommets sont les points $(i, \mathrm{T}(i))$, i parcourant les valeurs $-1, 0, \ldots s + 1$.

L'aire comprise entre cette ligne polygonale et l'axe des x est égale à

$$\sum_{x=0}^{s} \mathrm{T}(x) = (q + p)^s = 1 .$$

Soit d'autre part A_0 l'aire correspondante de la courbe binomiale. Je montrerai que la différence $A_0 - 1$, toujours positive, tend vers 0 plus rapidement qu'une puissance quelconque de $\frac{1}{s}$, lorsque s augmente indéfiniment. D'une manière plus précise

$$A_0 - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right) , \tag{9}$$

quel que soit le nombre n, le symbole o étant le second symbole de M. Landau. Je rappelle que la formule

$$f(s) = o(g(s)) ,$$

où $g(s)$ est une fonction positive de s pour des valeurs suffisamment grandes de la variable, signifie, d'après M. Landau

$$\lim_{s=\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 0 .$$

Démonstration. — Je distinguerai deux cas.

1er *cas.* $p = q = \frac{1}{2}$.

Envisageons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} y dx .$$

Je dis qu'elle est égale à 1.

En effet, en vertu des relations $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, on peut écrire

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(s-x+1)} = \frac{1}{x(x-1)\ldots(x-s)\Gamma(x-s)\Gamma(s-x+1)}$$

$$= \frac{(-1)^s}{\pi} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)\ldots(x-s)} .$$

D'autre part (décomposition en éléments simples)

$$\frac{1}{x(x-1)\ldots(x-s)} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x-1} + \ldots + \frac{c_s}{x-s} ,$$

où

$$c_k = (-1)^{s-k} \frac{1}{k!(s-k)!} .$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} y dx = \sum_{k=0}^{s} J_k ,$$

en posant

$$J_k = \frac{(-1)^s s! c_k}{\pi . 2^s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x-k} dx .$$

Or

$$J_k = \frac{s\,!}{k\,!\,(s-k)\,!}\,\frac{1}{2^s}\,,$$

par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{s\,!}{k\,!\,(s-k)\,!}\,\frac{1}{2^s} = 1\,, \tag{10}$$

formule probablement connue.

Posons maintenant

$$A_k = (-1)^k \int_{s+k}^{s+k+1} y\,dx\,,$$

k étant un nombre entier $\geqq 1$. La courbe binomiale étant symétrique dans le cas envisagé, nous pouvons écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = A_0 - 2A_1 + 2A_2 - \dots \tag{11}$$

Je dis que les intégrales A_k sont positives et forment une suite décroissante. En effet, en posant $x = s + k + y$, il vient

$$A_k = \frac{1}{\pi}\,\frac{s\,!}{2^s} \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{(s+k+y)(s+k+y-1)\dots(k+y)}\,dy\,.$$

On en tire immédiatement les inégalités $A_k > 0$ et $A_k > A_{k+1}$. Remplaçons maintenant dans (11) l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx$ par 1. Il vient

$$A_0 - 1 = 2A_1 - 2A_2 + \dots$$

ou

$$A_0 - 1 < 2A_1\,.$$

Or

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\,\frac{s\,!}{2^s} \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{(s+1+y)\dots(1+y)}\,dy < \frac{s\,!}{\pi\,.\,2^s}\,\frac{1}{(s+1)\,!} \int_0^1 \sin \pi y\,dy$$

d'où

$$A_1 < \frac{2}{\pi^2 (s+1)}\,\frac{1}{2^s}\,.$$

On voit donc que $2A_1$ est inférieure à $\frac{\alpha}{a^s}$, où $\alpha > 0$ et $a > 1$. Mais

$$\frac{\alpha}{a^s} = o\left(\frac{1}{s^n}\right).$$

Par suite

$$A_0 - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2me *cas.* p est un nombre positif quelconque inférieur à $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, qui est le cas général, l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} ydx$ n'a pas de sens et la démonstration précédente ne s'applique plus, mais la propriété (9) subsiste.

Pour l'établir, je commencerai par faire remarquer que A_0 est une fonction de p, que je désignerai par $A_0(p)$.

Nous venons de voir que $A_0\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$. Il suffira donc de montrer que

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) = o\left(\frac{1}{s^n}\right).$$

Or, en vertu du théorème des accroissements finis, on peut écrire

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} - p\right) A_0'(p_1), \tag{12}$$

en désignant par $A_0'(p)$ la dérivée de $A_0(p)$ par rapport à p, et par p_1 un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et p.

Mais on a

$$A_0'(p) = \frac{1}{pq}\int\limits_{-1}^{s+1}(x - sp)\,y\,dx = \frac{1}{pq}\int\limits_{-1-sp}^{sq+1} l y_l\,dl.$$

Appliquons à cette intégrale la formule (8). Il vient, en posant $l_1 = -1 - sp$, $l_2 = sq + 1$ et en changeant les signes

$$-A_0'(p) = j_1 - j_2, \qquad \text{où}$$

$$j_1 = \int\limits_{-1-sp}^{-sp} -\frac{sp + l}{p}\,y_l\,dl, \qquad j_2 = \int\limits_{sq}^{sq+1}\frac{l - sq}{q}\,y_l\,dl.$$

Les intégrales j_1 et j_2 sont évidemment positives, de plus $j_1 > j_2$. Pour le voir, le plus simple est peut-être de poser, comme me l'a fait remarquer M^lle^ S. Piccard, qui a repris l'étude de ces problèmes, $l = -sp - \varepsilon$ dans j_1 et $l = sq + \varepsilon$ dans j_2 ; le rapport des fonctions sous le signe pour une même valeur de ε s'écrit $\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1+2\varepsilon}$ et comme il est supérieur à 1, on a bien $j_1 > j_2$.

Par suite $-A_0'(p)$ est positive et l'on peut écrire

$$-A_0'(p) < j_1 < \int_{-1-sp}^{-sp} \frac{1}{p} q^s dl \ ,$$

puisque $-\frac{sp+l}{p} \leqq \frac{1}{p}$ et $y_l \leqq q^s$, la fonction y étant croissante dans l'intervalle envisagé pour s suffisamment grand.

On a donc, en vertu de (12),

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{q_1^s}{p_1} < \left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{q^s}{p} \ ,$$

et comme $\frac{q_s}{p} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$, il en résulte

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

et le théorème est établi.

D'autres propriétés importantes des courbes binomiales peuvent être déduites des formules (8) et (9). Je les indiquerai prochainement.