

# PROPRIÉTÉS D'UN PINCEAU DE NORMALES

Autor(en): **Dufour, Marcel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21258>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# PROPRIÉTÉS D'UN PINCEAU DE NORMALES

PAR

M. Marcel DUFOUR (Nancy).

*Sections principales.* — Si nous coupons une surface  $S$  au voisinage immédiat d'un point  $M$  par un plan  $Q$  parallèle au plan tangent en  $M$ , la section  $C$  est, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, une conique, en général une ellipse ou une hyperbole, dont le centre  $O$  est sur la normale en  $M$ . Menons par cette normale un plan  $P$  coupant la conique en deux points  $M'$  et  $M''$  (fig. 1). Le cercle passant par  $M'MM''$  est le cercle osculateur de l'intersection de  $S$  et de  $P$ : son rayon de courbure est  $R = \frac{\overline{M'O}^2}{2\overline{MO}}$ .  $MO$  est constant,  $M'O$  varie avec l'azimut du plan  $P$  et devient maximum ou minimum quand le plan  $P$  passe

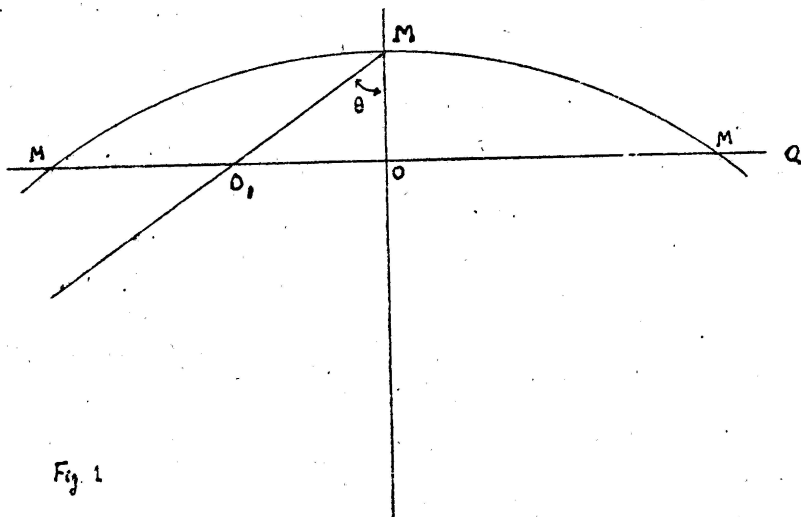


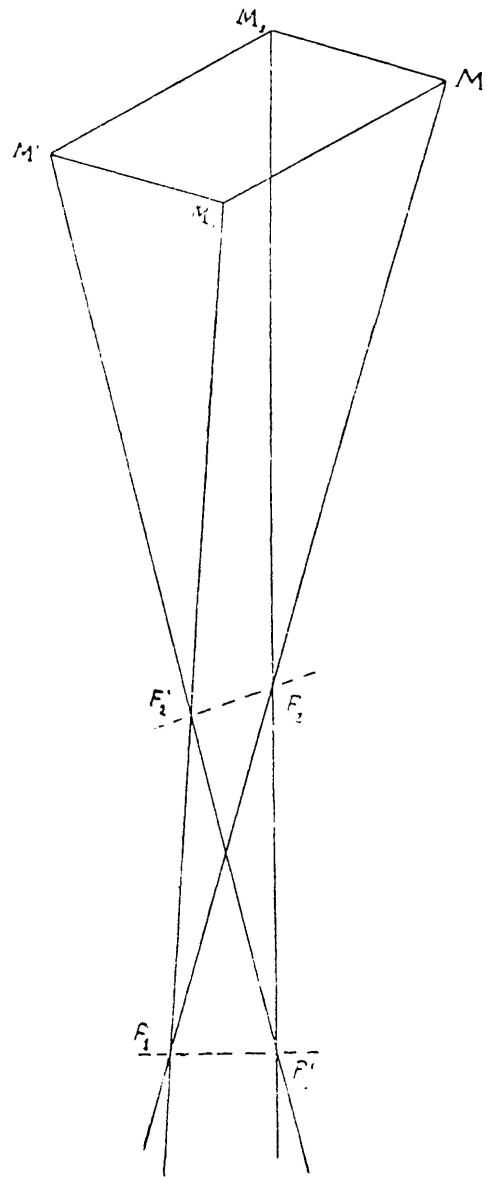
Fig. 1

par un des axes de  $C$ . Pour ces deux positions privilégiées  $P_1$  et  $P_2$  de  $P$ ,  $R$  passe par un maximum ou un minimum. La conique  $C$  est l'indicatrice de Dupin, et les deux plans  $P_1$  et  $P_2$  sont les

sections principales en M. Ils sont tangents aux *lignes de courbure* de la surface. Par chaque point M passent deux lignes de courbure perpendiculaires l'une à l'autre. Il y a pour la surface deux systèmes de sections principales et deux systèmes de lignes de courbure, que nous appellerons premier et second système.

Considérons dans le plan  $P_1$  sur la ligne de courbure deux points infiniment voisins M et  $M_1$ : la surface M étant au voisinage de M symétrique par rapport au plan  $P_1$ , la normale en  $M_1$  est par raison de symétrie dans le plan  $P_1$ : les normales en deux points infiniment voisins sur une ligne de courbure sont dans un même plan; les normales à la surface le long d'une ligne de courbure forment une surface développable. En deux points infiniment voisins, les sections principales d'un même système font entre elles un angle infiniment petit, et les tangentes aux lignes de courbure d'un même système sont parallèles à un infiniment petit près.

*Lignes focales.* — Traçons en un point M de la surface les deux lignes de courbure (fig. 2), et prenons dans le voisinage immédiat de M un point  $M_1$  sur la ligne du premier système et un point  $M_2$  sur la ligne du second système. La ligne de courbure du second système menée par  $M_1$  et la ligne de courbure du premier système menée par  $M_2$  se coupent en un point  $M'$ : d'après ce qui vient d'être dit, le quadrilatère  $MM_1M'M_2$  peut être considéré comme un rectangle. Soient  $F_1$  le point de ren-



$F_{3,2}$

être considéré comme un rectangle. Soient  $F_1$  le point de ren-

contre des normales à S en M et  $M_1$ ,  $F_2$  le point de rencontre des normales en M et  $M_2$ : nous appelons  $F_1$  et  $F_2$  premier et second *point focal* sur la normale en M. Puisque  $M'$  et  $M_2$  sont sur une même ligne de courbure, les normales en  $M'$  et  $M_2$  se rencontrent en un point  $F'_1$  infiniment voisin de  $F_1$ , et, si  $M'$  se déplace au voisinage de M, la normale en  $M'$  s'appuie constamment sur l'élément rectiligne  $F_1F'_1$  appelé première *ligne focale*: la première ligne focale est située dans le plan de la seconde section principale. De même, les normales en  $M'$  et  $M_1$  se rencontrent en un point  $F'_2$  infiniment voisin de  $F_2$ , et quand  $M'$  se déplace au voisinage de M,  $F'_2$  décrit la seconde ligne focale située dans le plan de la première section principale.

La normale en  $M'$  s'appuie donc sur les deux lignes focales en  $F'_1$  et  $F'_2$ . Nous désignerons par  $R_1$  la longueur  $MF_1$ , rayon de courbure dans la première section principale et par  $R_2$  la longueur  $MF_2$ , rayon de courbure dans la seconde section principale. A des infiniment petits près, les longueurs  $M'F'_1$  et  $M'F'_2$  sont respectivement égales à  $R_1$  et  $R_2$ .

*Relation d'Euler.* — Cherchons la valeur du rayon de courbure R en M de l'intersection de la surface S par le plan P normal à S en M et passant par le point  $M'$ . Désignant par  $ds$  la distance  $MM'$  et par  $\psi$  l'angle que font entre elles les normales en M et  $M'$  à l'intersection de S par P, nous avons

$$ds = \psi R \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = \frac{\psi}{ds}$$

La normale en  $M'$  à cette intersection est la projection sur P de la normale en  $M'$  à la surface S, puisque la projection d'un angle droit sur un plan passant par un de ses côtés est un angle droit. L'angle des normales à la surface en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure étant facilement connu, pour calculer  $\psi$  nous passerons successivement de M à  $M_1$ , projection de  $M'$  sur la première ligne de courbure, puis de  $M_1$  à  $M'$ , et, pour chacun de ces passages, nous projetterons sur le plan P l'angle dont tourne la normale à S (fig. 3).

Quand nous passons de M à  $M_1$ , la normale tourne autour du

premier point focal  $F_1$  dans le plan tangent à la première ligne de courbure en  $M$  d'un angle

$$\widehat{MF_1M_1} = \frac{ds_1}{R_1} = \frac{ds \cos \alpha}{R_1},$$

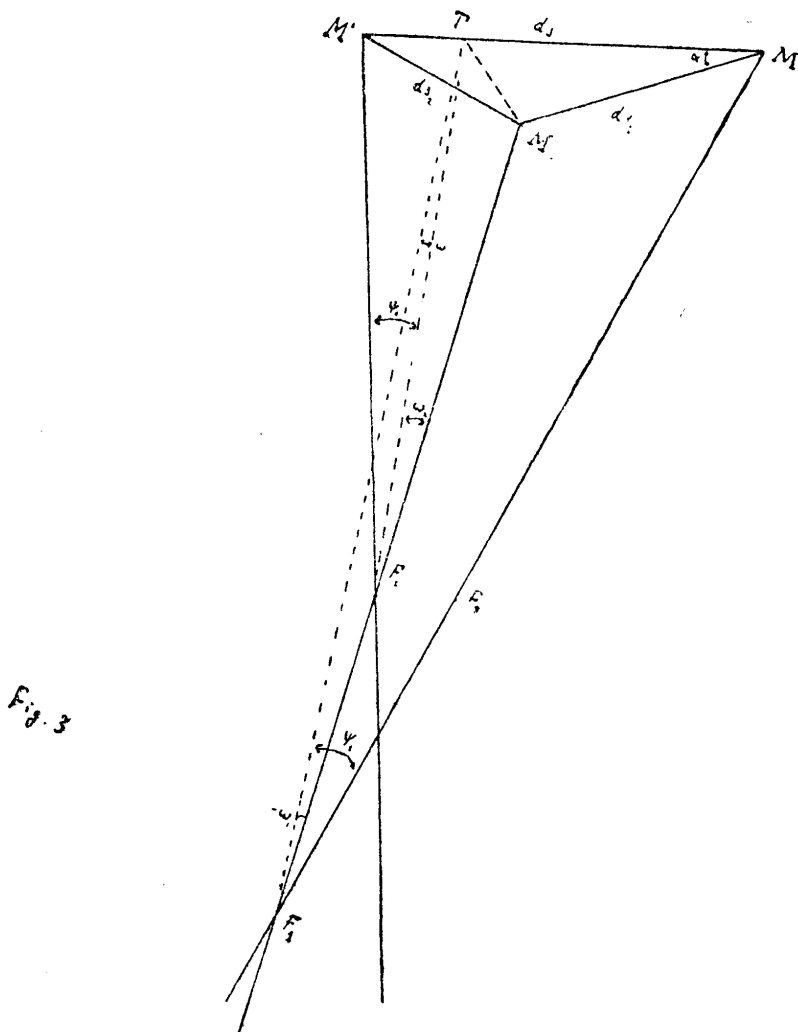


Fig. 3

$\alpha$  étant l'angle de l'élément  $ds$  avec la première ligne de courbure. Soit  $TF_1$  la projection de  $M_1F_1$  sur le plan  $P$ . La projection sur ce plan de l'angle  $\widehat{MF_1M_1}$  est  $\widehat{MF_1T}$  qui a pour valeur

$$\psi_1 = \frac{MT}{R_1} = \frac{ds_1 \cos \alpha}{R_1} = \frac{ds \cdot \cos^2 \alpha}{R_1}.$$

Quand nous passons de  $M_1$  à  $M'$ , la normale à  $S$  tourne autour du point  $F'_2$  de la seconde ligne focale dans le plan tangent à la seconde ligne de courbure en  $M'$  d'un angle

$$\widehat{M_1F'_2M'} = \frac{ds_2}{R_2} = \frac{ds \cdot \sin \alpha}{R_2}.$$

Le plan P et le plan déterminé par les trois points M, F<sub>2</sub>', M' étant infiniment voisins, la projection de cet angle M<sub>1</sub>F<sub>2</sub>'M' sur P est, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, égale à sa projection sur le plan MF<sub>2</sub>'M'. Cette dernière est

$$\psi_2 = \widehat{TF_2'M} = \frac{TM'}{R_2} = \frac{ds_2 \cdot \sin \alpha}{R_2} = \frac{ds \cdot \sin^2 \alpha}{R_2}.$$

Nous avons finalement

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

et

$$\frac{1}{R} = \frac{\psi}{ds} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}.$$

*Torsion géodésique.* — L'angle de torsion géodésique  $\omega$  est l'angle que fait la normale en M' à la surface S avec le plan P mené par la normale en M et par l'élément infiniment petit MM'. Cet angle  $\omega$  est situé dans le plan mené perpendiculairement à P par la normale en M', plan infiniment voisin du plan  $\Pi$  mené perpendiculairement à P par la normale en M<sub>1</sub>. L'angle de torsion géodésique est donc, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, égal à sa projection sur le plan  $\Pi$ . Pour le calculer, nous passerons successivement de M à M<sub>1</sub>, puis de M<sub>1</sub> à M', et, pour chacun de ces passages, nous projeterons sur le plan  $\Pi$  l'angle dont tourne la normale.

Quand nous passons de M à M<sub>1</sub>, la normale pivote autour de F<sub>1</sub> d'un angle MF<sub>1</sub>M<sub>1</sub> =  $\frac{ds_1}{R_1}$ . Le plan  $\Pi$  est déterminé par les trois points TM<sub>1</sub>F<sub>1</sub>. La projection sur  $\Pi$  de l'angle dont a tourné la normale est l'angle

$$\omega_1 = M_1 \widehat{F_1 T} = \frac{M_1 T}{R_1} = \frac{ds_1 \cdot \sin \alpha}{R_1},$$

et nous lui affectons le signe — parce que  $\overline{M_1 T}$  est la projection de  $\overline{M_1 M}$ , c'est-à-dire de  $(-ds_1)$ . Quand nous passons de M<sub>1</sub> à M', la normale tourne autour de F<sub>2</sub>' d'un angle M<sub>1</sub>F<sub>2</sub>'M' =  $\frac{ds_2}{R_2}$ . La projection de cet angle sur  $\Pi$  est

$$\omega_2 = M_1 \widehat{F_2' T} = \frac{M_1 T}{R_2} = \frac{ds_2 \cdot \cos \alpha}{R_2}$$

et nous lui affectons le signe + parce que  $M_1T$  est la projection de  $M_1M'$ , c'est-à-dire de  $(+ ds_2)$ . Les deux angles  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont dirigés en sens contraire.

Nous avons finalement

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{ds_2 \cdot \cos \alpha}{R_2} - \frac{ds_1 \cdot \sin \alpha}{R_1}$$

ou

$$\omega = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot ds = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\alpha \cdot ds .$$

La torsion géodésique est le rapport

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\alpha .$$

*Théorème de Meusnier.* — Etant donnée une tangente à la surface  $S$  en un point  $M$ , la relation d'Euler nous fait connaître le rayon de courbure  $R$  de la section normale faite dans la surface par le plan  $P$  contenant la tangente et normal à  $S$  en  $M$ . Cherchons la valeur  $R_\theta$  du rayon de courbure en  $M$  d'une section de  $S$  par un plan  $P_\theta$  contenant la tangente donnée et faisant avec  $P$  un angle  $\theta$  (fig. 1). Coupons la surface par le plan  $Q$  infiniment voisin du plan tangent en  $M$  et parallèle à lui. Soient  $\lambda$  et  $\lambda_\theta$  les longueurs des cordes limitées par  $S$  sur les intersections respectives de  $Q$  avec  $P$  et  $P_\theta$ . Si nous prenons le plan de figure perpendiculaire à la tangente donnée, ces cordes se projettent en  $O$  et  $O_\theta$ . Nous avons

$$R = \frac{\lambda^2}{2MO} \quad \text{et} \quad R_\theta = \frac{\lambda_\theta^2}{2MO_\theta}$$

d'où

$$\frac{R_\theta}{R} = \frac{MO}{MO_\theta} \left( \frac{\lambda_\theta}{\lambda} \right)^2 = \cos \theta \left( \frac{\lambda_\theta}{\lambda} \right)^2 .$$

La distance des deux cordes  $\lambda$  et  $\lambda_\theta$ , toutes deux parallèles à la tangente donnée, est  $OO_\theta = MO \operatorname{tg} \theta$ . Si nous regardons  $\lambda$  comme un infiniment petit du premier ordre,  $MO$  et par suite  $OO_\theta$  sont du second ordre, et la différence entre  $\lambda$  et  $\lambda_\theta$  est infiniment petite par rapport à  $\lambda$ . Nous avons au premier ordre près  $\frac{\lambda_\theta}{\lambda} = 1$ .

Donc  $R_\theta = R \cos \theta$ .