CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT QUELCONQUE D'UNE SECTION CONIQUE

Autor(en): **Gennimatas, N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21260

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT QUELCONQUE D'UNE SECTION CONIQUE

PAR

N. Gennimatas (Athènes).

---

1. — En partant des équations paramétriques

$$x = a \cos v\ , \qquad y = b \sin v \tag{1}$$

de l'ellipse ($2a$, $2b$), rapportée à ses axes, on obtient pour le rayon de courbure à un point P (v) l'expression

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}{ab}\ ,$$

ou, en tenant compte des équations (1):

$$R = \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}\ . \tag{2}$$

Désignons par F_1 ($-c$, o), F_2 (c, o) les foyers et par P (x, y) un point quelconque de l'ellipse, on a

$$(F_1 P)^2 = r_1^2 = (x + c)^2 + y^2\ , \qquad (F_2 P)^2 = r_2^2 = (x - c)^2 + y^2\ ,$$

en même temps que

$$(r_1 + r_2)^2 = 4a^2\ ;$$

d'où

$$r_1 r_2 = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2$$

ou (comme $c^2 = a^2 - b^2$),

$$r_1 r_2 = a^2 + b^2 - x^2 - y^2\ . \tag{3}$$

Ainsi, d'après (3), la formule (2) devient

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \tag{4}$$

2. — En se servant des fonctions hyperboliques on a pour l'hyperbole $(2a, 2b)$, rapportée à ses axes, les équations

$$x = ach\varphi , \quad y = bsh\varphi , \tag{5}$$

et pour le rayon de courbure au point P (x, y) de la courbe

$$R = \frac{(a^2 sh^2 \varphi + b^2 ch^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab} , \tag{6}$$

ou, en tenant compte des équations (5):

$$R = \frac{(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \tag{7}$$

Mais si, comme dans le cas de l'ellipse, r_1 et r_2 représentent les distances E_1 P et E_2 P du point P de l'hyperbole aux foyers, on trouve aisément

$$r_1 r_2 = x^2 + y^2 - a^2 + b^2 . \tag{8}$$

Ainsi, d'après (8), la formule (7) devient

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} , \tag{9}$$

formule semblable à la formule (4).

3. — Pour le rayon de courbure au point P (x, y) de la parabole

$$y^2 = 2px \tag{10}$$

on a la formule

$$R = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{p}{2} + x\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} ,$$

ou, comme $\frac{p}{2} + x = r$, r représentant la distance du point de la parabole au foyer:

$$R = \frac{(2r)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}},$$

ou encore

$$R = \frac{(2r)^2}{\sqrt{2pr}} . \qquad (11)$$

4. — Comme il est très facile de tracer la normale à un point quelconque d'une section conique, la construction du centre de courbure correspondant se réduirait à la construction d'un segment de longueur égale au rayon de courbure. Aussi bien pour l'ellipse que pour l'hyperbole on pourrait, en se servant de la formule

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} ,$$

arriver aux constructions suivantes:

1. Soient r_1, r_2 les distances d'un point de l'ellipse $(2a, 2b)$ aux foyers. Après avoir tracé le cercle de diamètre $AA' = 2a$ (fig. 1), on porte sur la droite AA' les segments $AD = 1$ et $AP_1 = r_1$, $(A'P_1 = r_2)$, et sur la tangente en A les segments $AB = ab$ et $AP_2 = A'P_1 = r_2$; on mène du point P_1 la perpendiculaire d au diamètre AA': alors on aura $P_1S = \sqrt{r_1 r_2}$. On mène P_1C parallèle à DP_2 et on obtient ainsi $AC = r_1 r_2$; joignons B à S et C à E, point où la droite BS coupe le diamètre AA': le point T où la droite passant par C et E ren-

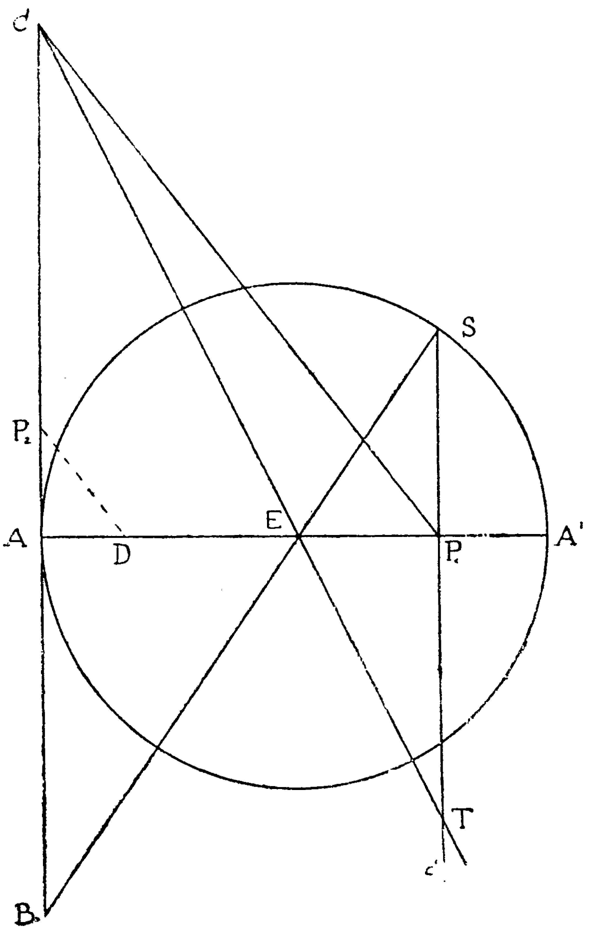

Fig. 1

contre la droite d nous donne le segment P_1T égal au rayon de courbure R correspondant au point considéré de l'ellipse. En effet, des deux paires de triangles semblables EP_1T, ACE et EP_1S, ABE on obtient

$$\frac{P_1T}{AC} = \frac{EP_1}{AE} = \frac{P_1S}{AB},$$

d'où

$$P_1T = AC \cdot \frac{P_1S}{AB} = r_1 r_2 \cdot \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{ab} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = R, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2. Soient r_1, r_2 les distances d'un point de l'hyperbole ($2a$, $2b$) aux foyers. Après avoir tracé le cercle de diamètre $AA' = 2a$

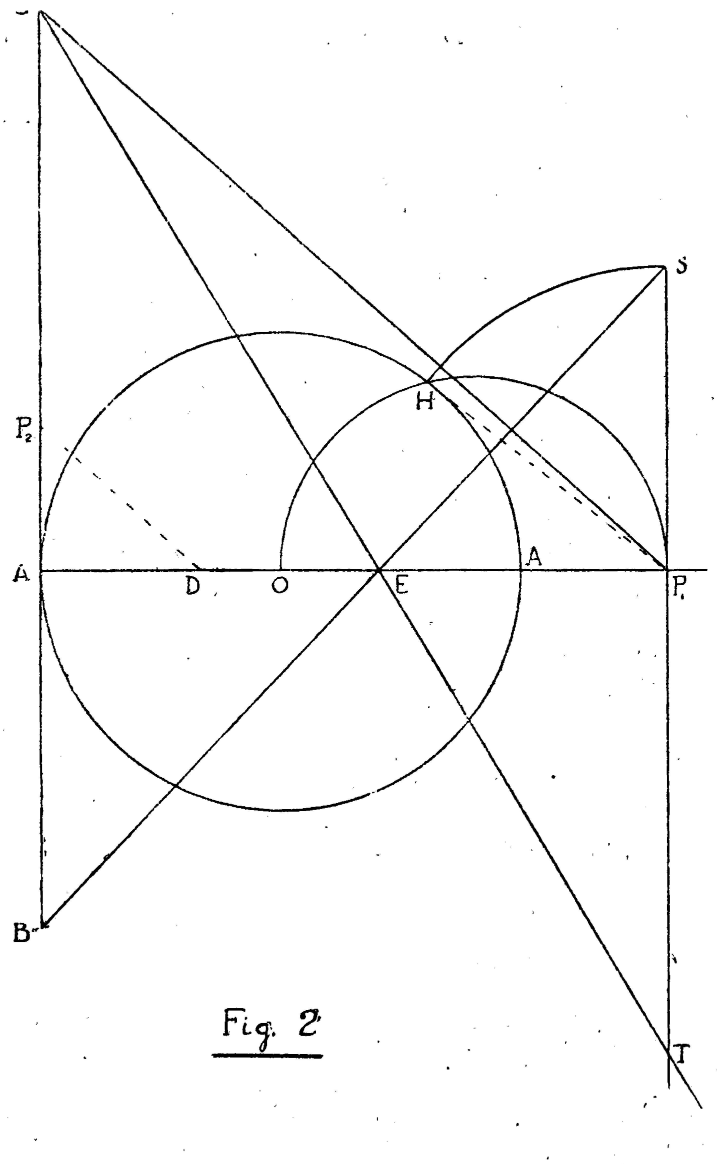

Fig. 2

(fig. 2), on porte sur la droite AA' les segments $AD = 1$, $AP_1 = r_1$, ($A'P_1 = r_2$), et sur la tangente en A les segments $AB = ab$,

$AP_2 = r_2$. O étant le centre du cercle déjà tracé, soit H un des deux points communs à ce cercle et au cercle de diamètre OP_1; on a alors $P_1 H = \sqrt{r_1 r_2}$. On porte ce segment sur la perpendiculaire d à la droite AA′, passant par P_1, de sorte qu'on ait $P_1 S = P_1 H$; on mène $P_1 C$ parallèle à DP_2 et on obtient ainsi $AC = r_1 r_2$. Joignons B à S et C à E, point où la droite BS coupe la droite AA′: le point T où la droite passant par C et E rencontre la droite d est tel qu'on a $P_1 T = R$, ce qu'on reconnaît de la même manière comme au cas précédent.

3. Dans le cas de la parabole $y^2 = 2px$ on construit le segment dont la longueur égale le rayon de courbure R au point de la courbe à la distance r au foyer, en se servant de la formule (11), de la manière suivante : Après avoir tracé le cercle de diamètre $DD' = 2r$ sur lequel on porte le segment $DA = p$ (fig. 3), on aura la corde DB égale à $\sqrt{2pr}$. Si l'on porte DB sur la tangente en D de sorte qu'on ait $DC = DB$, en joignant C à D′ et menant D′ E perpendiculaire à CD′, on obtient sur la tangente le point E tel qu'on ait $DE = R$, comme on le voit immédiatement.

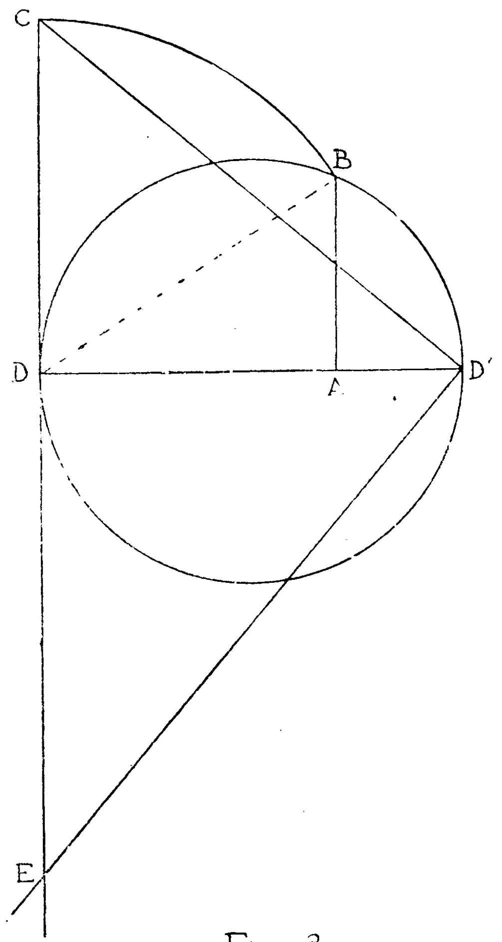

Fig. 3