

# Réunion de Bâle, 2 et 3 septembre 1927.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

Réunion de Bâle, 2 et 3 septembre 1927.

La Société Mathématique suisse a tenu sa 17<sup>me</sup> Assemblée annuelle ordinaire à Bâle, les 2 et 3 septembre 1927, sous la présidence de M. le professeur F. GONSETH (Berne), en même temps que la 108<sup>me</sup> session annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles.

Le programme très chargé de la réunion comprenait 17 communications, desquelles 16 ont été effectivement présentées à la séance. Nous en donnons les résumés plus bas.

1. — A. WEINSTEIN (Rome). — *Sur une extension d'un principe analytique avec des applications à l'hydrodynamique.* — On considère dans la théorie classique des fonctions harmoniques trois sortes de conditions homogènes aux limites. Ce sont les conditions de

$$\text{Dirichlet: } U = 0 ,$$

$$\text{Neumann: } \frac{dU}{dn} = 0 ,$$

$$\text{Fourier: } \frac{dU}{dn} = pU ; \quad p < 0 .$$

La constante (ou fonction) donnée  $p$  est essentiellement *négative* ( $n$  désignant la normale extérieure), ainsi que l'exige la Théorie de la Chaleur de FOURIER. Si le domaine est borné, on peut affirmer dans les trois cas que  $U$  est identiquement zéro (ou const.).

Le développement récent de l'Hydrodynamique plane, surtout les travaux qui se rattachent plus ou moins directement aux théories de M. LEVI-CIVITA, a conduit d'une manière naturelle à l'étude du cas où  $p$  est *positif*, et il convient de désigner la condition

$$\frac{dU}{dn} = pU ; \quad p > 0$$

comme *condition de Levi-Civita*.

Le cas d'un domaine non borné présente un intérêt particulier. Les fonctions correspondantes  $U$  ont été étudiées pour la *condition de Dirichlet* par PHRAGMÉN et LINDELÖF en 1908. Pour les conditions de NEUMANN, FOURIER et LEVI-CIVITA on peut obtenir des résultats analogues bien que les méthodes de la théorie des fonctions employées par Phragmén et Lindelöf ne soient plus applicables.

2. — L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Sur un théorème d'Hurwitz.*

— L'auteur a déterminé, dans le corps  $\{Hm\}$  des quaternions hamiltoniens à coordonnées rationnelles, tous les groupes additifs et multiplicatifs possibles. Il a traité ce problème par deux méthodes, l'une basée sur la théorie des substitutions, l'autre sur les propriétés des modules de nombres. L'auteur indique la base du domaine holoïde le plus général formé à l'aide de quatre quaternions linéairement indépendants du corps  $\{Hm\}$ . Comme première application, il démontre que pour arriver au domaine hurwitzien, dont la base est

$$i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad \frac{1 + i_1 + i_2 + i_3}{2},$$

savoir à l'ensemble des quaternions hamiltoniens

$$\frac{m_0}{2} + \left(\frac{m_0}{2} + m_1\right)i_1 + \left(\frac{m_0}{2} + m_2\right)i_2 + \left(\frac{m_0}{2} + m_3\right)i_3$$

obtenus quand  $m_0, m_1, m_2$  et  $m_3$  parcourent indépendamment l'un de l'autre toutes les valeurs entières de  $-\infty$  à  $+\infty$ , il suffit de postuler dans le module, outre les nombres complexes entiers de Gauss, encore *une* unité relative, par exemple  $i_2$ ; c'est la condition nécessaire et suffisante. Comme deuxième application, l'auteur indique deux théorèmes relatifs aux groupes contenus dans le corps  $\{Hm\}$ . Il généralise le théorème d'Hurwitz en remplaçant le dénominateur 2 par un nombre entier quelconque. La généralisation la plus simple aboutit au domaine ayant comme base

$$1, \quad i_1, \quad ai_2, \quad \frac{a + ai_1 + bi_2 + i_3}{2a},$$

à condition que  $a$  et  $b$  vérifient l'équation de Fermat

$$b^2 - 2na^2 = -1,$$

où  $n$  est un nombre entier. Par exemple,

$$\left(\frac{m_3}{2} + m_0\right) + \left(\frac{m_3}{2} + m_1\right)i_1 + \left(\frac{41}{58}m_3 + 29m_2\right)i_2 + \frac{m_3}{58}i_3,$$

les  $m_0, m_1, m_2$  et  $m_3$  ayant la même signification que ci-dessus.

Une note sur les recherches de l'auteur dans ce domaine a paru dans les *Comptes Rendus* des séances de l'Académie des sciences de Paris, t. 184, p. 59, séance du 10 janvier 1927.

3. — A. HEYER (St. Gall). — *Sur des lieux géométriques se rattachant aux coniques homofocales.* — Dans les énoncés qui suivent A est toujours un sommet principal de la conique, B un sommet secondaire, F un foyer,  $c$  l'excentricité linéaire,  $\rho$  le rayon de courbure. L'origine O est au centre de la conique.

I. Considérons un faisceau de coniques homofocales et élevons en F la perpendiculaire sur l'axe principal; aux points d'intersection de cette dernière avec les courbes, menons les tangentes et abaissons les perpendiculaires de F sur ces tangentes. Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires est la strophoïde droite

$$y = \pm (c - x) \sqrt{\frac{x}{2c - x}}$$

Par chaque point P de la perpendiculaire par F à l'axe principal passent deux coniques, une ellipse et une hyperbole. Menons la tangente à chacune de ces coniques au point considéré. De F abaissons les perpendiculaires  $FP_1$  et  $FP_2$  sur ces deux tangentes. La distance  $P_1 P_2$  est toujours égale à FP. Au foyer on trouve pour la strophoïde  $\rho = c/2$ .

II. Dans un faisceau d'ellipses homofocales, menons pour chacune des courbes la corde issue de B et passant par F et soit C le second point d'intersection avec la conique. Par B et C menons les parallèles aux axes jusqu'en leurs points d'intersection. Le lieu géométrique de P est donné par l'équation

$$y = \pm c \sqrt{\frac{2(x - c)}{2c - x}}$$

La courbe a pour asymptote  $x = 2c$ . Le point d'inflexion est donné par  $x = 5c/4$ . Au foyer on a  $\rho = c$ .

III. Dans un faisceau de coniques homofocales, considérons les cordes issues du point B et passant par F. Le lieu géométrique du pôle de ces cordes par rapport au cercle de centre O et de rayon  $a$  est

$$x^2 + y^2 = xy^2/c \quad (\text{courbe de Longchamp}).$$

L'asymptote est donné par  $x = c$ . Le minimum correspond à  $x = 2c$ ,  $y = 2c$ . Pour le point d'inflexion on a  $x = 4c$ .

Le point le plus rapproché du centre est  $x = 3c/2$ ,  $y = 3\sqrt{2}c/2$ . Au minimum on a  $\rho = 2c$ .

IV. Dans un faisceau d'ellipses homofocales, menons, pour chacune des courbes, la corde BF et le diamètre passant par l'une des extrémités de l'ordonnée au foyer. Le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux droites est représenté par

$$y = \pm \frac{(c-x)^2}{\sqrt{c(2x-c)}} .$$

L'asymptote a pour équation  $x = c/2$ . Au foyer on a  $\rho = c/2$ .

V. Dans un faisceau d'ellipses homofocales, menons les cordes AB et abaissons du centre la perpendiculaire sur cette corde. Le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire est, en coordonnées cartésiennes,

$$(y^2 - x^2)(x^2 + y^2) = c^2 x^2 y^2 . \quad (1)$$

et en coordonnées polaires

$$r = c \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^4 \varphi - 1}} . \quad (2)$$

La courbe a les asymptotes  $y = \pm x$ ; pour le point d'inflexion on trouve  $x = c\sqrt{2}/3$ ,  $y = 2c/3$ . Au centre on a  $\rho = c/2$ . Le point de la courbe le plus éloigné de l'origine a son amplitude donnée par

$$\operatorname{tg}^5 \varphi - 2 \operatorname{tg}^4 \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0 .$$

On ne peut utiliser que les racines suivantes:

- 1)  $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$  pour le point à l'infini ,
- 2)  $\operatorname{tg} \varphi_2 = (1 + \sqrt{17})/4 + \sqrt{(1 + \sqrt{17})/8}$ ,  $\varphi_2 = 64^\circ 20' 2''$  .

En calculant les points d'inflexion on obtient l'équation symétrique suivante

$$2 \operatorname{tg}^8 \varphi - \operatorname{tg}^6 \varphi - 6 \operatorname{tg}^4 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 = 0 .$$

La seule racine utilisable est

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2} , \quad \varphi = 54^\circ 44' 7'' .$$

La tangente au point d'inflexion est déterminée par

$$\operatorname{tg} \varphi = 4\sqrt{2}/7 .$$

Ce point correspond à l'ellipse pour laquelle  $b = c$ .

4. — J. KIRMSE (Schmölln, Thuringe). — *La théorie idéale des domaines de rationalité quaternionaire Liouvilliens.* (Voir le résumé inséré dans les *Actes de la Société Helv. des Sc. nat.*, réunion de Bâle, 1927.)

5. — M. GUT (Zurich). — *Sur le nombre des classes d'un corps quadratique.* — L'auteur réfère à son travail paru sous le même titre dans la *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich* (72<sup>me</sup> année, 1927, p. 197). En vertu de l'équation fonctionnelle de M. HECKE on obtient une expression un peu différente de l'expression classique pour le nombre des classes d'un corps de nombres algébriques quelconque. A l'aide d'un théorème sur les séries divergentes de Dirichlet, on peut en particulier pour les corps quadratiques déterminer le nombre des classes sans qu'il soit nécessaire de recourir aux sommes de Gauss. L'auteur ajoute que postérieurement M. Hecke l'a rendu attentif au fait que E. LANDAU a évalué déjà une fois, mais d'une manière différente, les deux séries divergentes dans le cas des corps quadratiques. (Voir *Journal de Crelle*, tome 125, année 1903, p. 64 et suiv., spécialement p. 132-137.)

6. — R. WAVRE (Genève). — *Sur la stratification et les mouvements internes des planètes.* — La recherche des figures d'équilibre relatif d'une masse fluide hétérogène en rotation autour de son axe polaire a fait l'objet des mémorables travaux de Clairaut, de Laplace, de Poincaré. Ces auteurs ont montré qu'en première approximation les surfaces d'égale densité sont ellipsoïdales pour de petite valeur de la vitesse angulaire. MM. Liapounoff, Lichtenstein et Véronnet ont fait connaître aussi d'importants résultats au sujet de l'équilibre relatif. Un ancien élève M. Dive, qui est aujourd'hui mon collaborateur dans ce genre de questions et moi-même avons poursuivi l'étude du mouvement permanent de rotation d'une masse fluide hétérogène sans supposer *a priori* qu'elle fut en équilibre relatif. Notre seule hypothèse est que chaque particule tourne autour de l'axe avec une vitesse angulaire constante, cette vitesse pouvant varier d'une particule à une autre.

Je me suis spécialement consacré à l'étude de ces mouvements dans le cas où il existe un potentiel du champ de la pesanteur; j'ai pu montrer que la vitesse angulaire ne dépendait que de la distance à l'axe et que les couches d'égale densité tendent vers la forme ellipsoïdale quand elles se rapprochent du centre. M. Dive a pu établir que pour ces mouvements la stratification ne saurait être ellipsoïdale dans son ensemble. Il faut en conclure que la planète ne saurait pas non plus être stratifiée en couches d'égale densité homothétiques. Ces mouvements que nous appelons mouvements de genre un sont caractérisés par l'une quelconque des propositions suivantes:

- 1° Il existe un potentiel du champ de la pesanteur.
- 2° Il existe un potentiel des accélérations.
- 3° Les surfaces d'égalité de densité sont horizontales.
- 4° La vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe.

Nous avons fait voir également que les mouvements de première espèce dépendent entièrement de la résolution d'une équation de Fredholm de première espèce.

M. Dive a démontré l'existence de mouvement de genre deux, où les surfaces d'égalité de densité ne sont plus normales au champ de la pesanteur. La stratification peut alors être ellipsoïdale en toute rigueur et non seulement en première approximation. En admettant précisément que les couches d'égalité de densité soient des ellipsoïdes de révolution, M. Dive a mis en évidence des inégalités de la vitesse angulaire quand on se meut de l'équateur au pôle ou de la surface au centre. Ces inégalités rendent compte merveilleusement de certains faits géologiques tels que la brisure qui passe par les grands lacs d'Afrique ou la configuration de certains continents. L'étude de M. Dive paraît confirmer quelques-unes des vues de M. Wegener.

Nos recherches ont paru aux « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », année 1927, en 6 notes et *in extenso* dans les « Archives des sciences physiques et naturelles » de Genève, années 1924, 1925, 1926, 1927.

7. — G. PÓLYA (Zurich). — *Sur une condition à laquelle satisfont les coefficients des séries entières prolongeables.* — Désignons par A un ensemble fermé situé dans le plan des  $z$ , par  $\rho$  le rayon du plus petit cercle de centre  $z = 0$  contenant A et par  $\sigma$  le rayon du plus petit cercle de même centre contenant tous les points de condensation de A. Soit  $\mathfrak{G}_n(z) = z^n + \dots$  le polynome de degré  $n$  s'écartant le moins possible de zéro dans l'ensemble A et soit  $\tau_n$  son écart, c'est-à-dire le maximum de  $|\mathfrak{G}_n(z)|$  sur l'ensemble A. Comme on sait, d'après M. Fekete, la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\tau_n} = \tau$$

existe. On a  $\rho \geq \sigma \geq \tau$ .

Soit  $\rho$  le rayon de convergence de la série

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots = f(z) \tag{1}$$

et soit  $f(z)$  régulière et uniforme dans l'ensemble complémentaire de A. Mettons

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \dots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix} = A_n^{(k)} .$$

Supposons que  $n$  varie avec  $k$  de manière que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k} = \alpha > 0.$$

Alors on a

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |A_n^{(k)}|^{\frac{1}{(n+k-1)k}} \leq \sigma^{1-\alpha} \tau^\alpha. \quad (2)$$

Dans le cas particulier  $n = 0$  (donc  $\alpha = 1$ ) c'est le signe d'égalité qui est valable pour beaucoup de fonctions spéciales  $f(z)$  (et peut-être pour toutes les fonctions) si  $A$  est choisi convenablement. Voici un corollaire de (2): Si les coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots$  de la série (1) sont des nombres entiers et  $f(z)$  est une fonction uniforme *transcendante*, l'ensemble des points singuliers de  $f(z)$  n'est pas dénombrable. Chemin faisant on trouve le théorème suivant: Si les ensembles  $A$  et  $A^*$  sont fermés,  $A^*$  est contenu dans  $A$ ,  $A - A^*$  est dénombrable et  $\tau^*$  est dérivé de  $A^*$  de la même manière que  $\tau$  est de  $A$ , on a  $\tau^* = \tau$ .

8. — F. GONSETH (Berne) et G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur la relativité à cinq dimensions et la théorie des quanta*. Voir: C. R. Acad. Sc., Paris, t. 185, p. 341, 412, 448 et 535; août-septembre 1927.

9. — S. BAYS (Fribourg). — *Sur le nombre des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour  $N = 6n + 1$  premier*. — Le problème de l'obtention des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour  $N = 6n + 1$  premier, est actuellement ramené à celui de l'obtention des systèmes de caractéristiques différents, appartenant à chaque diviseur  $d$  de  $3n$ <sup>1</sup>.

La recherche des systèmes de caractéristiques différents appartenant à  $n$  et aux diviseurs de  $n$  a été ramenée au problème suivant<sup>2</sup>:

Obtenir toutes les combinaisons constituées de  $x$  triples pris dans  $n - 2$  colonnes cycliques de triples des éléments  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ ; ( $\alpha$ ), et de  $y$  éléments pris dans la série ( $\alpha$ ) avec la propriété:  $3x + y = n$  et qu'en la même combinaison les éléments soient tous différents. Des combinaisons obtenues, ne retenir que celles qui ne sont pas déductibles l'une de l'autre par les substitutions du groupe  $\{(012 \dots \overline{n-1})\}$ .

La recherche des systèmes de caractéristiques différents appartenant au diviseur  $d$  quelconque de  $3n$ , est maintenant ramenée au problème suivant:

<sup>1</sup> Voir mes second et troisième mémoires sur ce problème des systèmes cycliques de triples de Steiner: l'un est dans le *Journ. de math. pures et appliquées*, t. 2, 1923, fasc. 1, p. 73 à 98; l'autre est dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. XVII, 1925, p. 3 à 41.

<sup>2</sup> Voir le troisième mémoire (celui des *Annales de Toulouse*) aux p. 29 à 41.

Si  $d$  est  $n$  ou un diviseur de  $n$ , on a au plus  $n - 2$  colonnes cycliques ( $n - 2$  pour  $d = n$ ) de triples des éléments  $0, 1, 2, \dots, d - 1$ ; ( $\beta$ ); les éléments ( $\beta$ ) représentent chacun  $\frac{n}{d}$  des éléments ( $\alpha$ ). Il faut obtenir toutes les combinaisons de  $x$  triples pris dans ces colonnes cycliques et de  $y$  éléments pris dans la série ( $\alpha$ ) avec la propriété:  $\frac{3nx}{d} + y = n$  et qu'en la même combinaison les éléments ( $\alpha$ ) représentés ou entrant effectivement soient tous différents.

Si  $d$  est multiple par 3 de  $n$  ou d'un diviseur de  $n$ , on a au plus  $n - 1$  colonnes cycliques de triples des éléments ( $\beta$ ). Il faut simplement obtenir toutes les combinaisons de  $\frac{d}{3}$  triples pris dans ces colonnes, sans élément répété ou, autrement dit, contenant chacune tous les éléments ( $\beta$ ).

Dans l'un et l'autre cas, il ne faut retenir que celles des combinaisons qui ne sont pas déductibles l'une de l'autre par les substitutions du groupe  $\{(012 \dots \overline{d-1})\}$ .

Avant ce résultat, j'avais pu pousser la recherche des systèmes de caractéristiques différents et donc celle des systèmes cycliques de triples de Steiner différents jusqu'à  $N = 43$ ; je puis maintenant avec du temps, obtenir les systèmes de caractéristiques différents appartenant à chaque diviseur  $d$  (excepté  $3n$  lui-même) jusqu'à  $N = 97$ , et surtout donner *presque immédiatement* ceux appartenant aux petits diviseurs de  $3n$ , au diviseur 3 en particulier, pour des  $N = 6n + 1$  premiers plus grands, même aussi grands que l'on veut, pourvu que j'en aie une racine primitive.

10. — S. BAYS (Fribourg). — *Sur un problème posé par Cayley en rapport avec le problème des systèmes de triples de Steiner.* — Le problème posé par CAYLEY, relativement au problème des systèmes de triples de Steiner, est le suivant. Nous l'énoncerons d'une façon plus explicite:

Un système de triples de Steiner de  $N$  éléments est tel que chaque couple des  $N$  éléments entre *une fois et une seule fois* dans un de ces triples. Un système de triples de Steiner contient donc  $\frac{N(N-1)}{6}$  triples. *Pourrait-on répartir les  $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$  triples de  $N$  éléments en  $N - 2$  systèmes de triples de Steiner ?*

Cayley a fait remarquer que pour 7 éléments (les systèmes de triples de Steiner n'existent que pour les  $N$  des formes  $6n + 1$  et  $6n + 3$ ) cette répartition n'est pas possible; sur les 30 formes différentes que prend l'*unique* système de triples de Steiner de 7 éléments par les 7! permutations de ces éléments, on peut en trouver *deux* différentes par tous leurs triples et pas davantage, alors qu'il en faudrait *cinq*

pour contenir les 35 triples de 7 éléments. Il a donné une démonstration, fautive d'ailleurs (voir *Actes de la S. H. S. N.*, Lugano, 1919, II<sup>me</sup> partie, p. 74) incitant à croire que pour 15 éléments cette répartition n'est pas possible non plus. J'ai montré que pour 9 éléments (*Enseignement mathématique*, n° 1-2, 19<sup>me</sup> année, 1917, p. 57-67) la question de Cayley a deux solutions différentes (ne provenant pas l'une de l'autre par une permutation des éléments); et à l'encontre de Cayley qui paraît avoir pensé plutôt le contraire, il me semble que cette répartition de l'ensemble des triples de  $N$  éléments en  $N - 2$  systèmes de triples de Steiner doit être possible au moins pour certains  $N$  des formes  $6n + 1$  et  $6n + 3$ .

Pour les  $N = 6n + 1$  premiers en dessous de 100, je puis donner maintenant, pour chacun d'eux, un nombre de systèmes cycliques de triples de Steiner *différents par tous leurs triples* supérieur à  $(N - 2)/2$ , *excepté*, comme il vient d'être dit, *pour*  $N = 7$ . Ainsi pour  $N = 61$ , j'obtiens avec la plus grande facilité, parce que les systèmes de caractéristiques appartenant aux petits diviseurs de  $3n$ , ou à des diviseurs que je dirai commodes, me suffisent pour cela, 44 systèmes cycliques de triples *sans un triple commun*, alors que la répartition de Cayley en demanderait 59. Pour  $N = 73$ , j'en obtiens 56 sur 71 qui seraient nécessaires.

Il faut remarquer d'ailleurs que je n'opère qu'avec une catégorie très restreinte de systèmes de triples, les systèmes de triples *cycliques*; si je parvenais à une solution de la question de Cayley par cette voie, elle serait une solution d'un type particulier aussi, puisque possédant le groupe cyclique  $\{ | x, 1 + x | \}$ ; c'est une raison de plus, me semble-t-il, de penser que, si nous avons à disposition *tous* les systèmes de triples de Steiner qui existent pour  $N$  éléments, la répartition de Cayley serait probablement possible.

H. S. WHITE a démontré (*Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. XVI, n° 1, 1915) que pour  $N = 31$ , il y a déjà plus de  $37 \times 10^{12}$  systèmes de triples de Steiner *différents* (il y a 80 systèmes *cycliques* de triples de Steiner *différents* pour  $N = 31$ ); avec toutes les formes qu'ils peuvent prendre chacun par les permutations du groupe symétrique des 31 éléments, on a une idée du nombre excessivement grand déjà pour  $N = 31$ , de systèmes de triples à disposition pour chercher une répartition de Cayley.

11. — Rod. FUETER. — *Les lois de réciprocité dans un corps quadratique imaginaire.* — La théorie des fonctions elliptiques et de la multiplication complexe exposée dans mon livre *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen* (zweiter Teil, Teubner, 1927), permet de déduire des lois de réciprocité qui correspondent à la célèbre loi de EISENSTEIN. On prend seulement pour base, au lieu des nombres rationnels, les nombres

d'un corps quadratique imaginaire quelconque. L'analogie entre la fonction exponentielle et la fonction elliptique :

$$\mathfrak{G}(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{\mathfrak{p}\left(\frac{\omega_3}{4}\right) - \mathfrak{p}\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}{\mathfrak{p}(z; \omega_1, \omega_2) - \mathfrak{p}\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

est alors parfaite. Comme le nombre des classes est en général plus grand que un, les déductions doivent se faire dans le corps des classes du corps quadratique, ou mieux dans le corps des classes  $k(4)$ , qui correspond aux classes du rayon pour le conducteur 4.

Prenons le cas le plus simple, celui qui conduit à la loi de réciprocité des restes quadratiques. On a la formule :

$$\prod_{(x)} \left( \sqrt{\mathfrak{G}(\bar{x}\lambda)} - \sqrt{\mathfrak{G}(x\lambda)} \right) = \pm n_\pi(1) \sqrt{\pi}, \quad \lambda = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{4\pi},$$

où  $\pi$  est un nombre premier primaire,  $n_\pi(1)$  un nombre du corps  $k(4)$ ,  $\bar{x}$  remplit les conditions :

$$x \equiv \bar{x} \equiv 1 \pmod{4}, \quad \bar{x} \equiv -x \pmod{\pi},$$

et le produit s'étend à un système de restes (mod.  $\pi$ ). Cette formule contient la loi :

$$\left\{ \frac{\pi}{x} \right\} = \left\{ \frac{x}{\pi} \right\},$$

$\pi$  et  $x$  deux nombres premiers primaires, suivant qu'on applique la loi générale de la décomposition des nombres premiers dans les corps de rayons (mod.  $4\pi$ ), ou qu'on détermine cette décomposition dans le corps relatif  $\sqrt{\pi}$ . Dans le cas des nombres de GAUSS cette loi est identique avec celle de GAUSS.

12. — A. SPEISER (Zurich). — *Sur les groupes et groupoïdes.* — La théorie des nombres à multiplication non commutative présente un aspect assez nouveau, comparée avec l'arithmétique des nombres algébriques. On peut la caractériser par le fait que les notions de nombre ordinal et nombre cardinal ne s'harmonisent plus entièrement.

Le problème de la construction de tous les idéaux qui appartiennent, par exemple du côté droit, à un certain domaine d'intégrité (1), et de la recherche de leurs relations mutuelles, est complètement résolu. C'est l'équivalent des nombres ordinaux. De même la transition d'un nombre à un autre dans le sens de l'addition ne présente aucune difficulté. Par contre la transition d'un idéal (a) à un idéal (b) dans le sens de la multiplication, c'est-à-dire la formation du quotient

(b)/(a) ne peut en général être réalisée dans le même système d'idéaux et il s'en suit que le caractère vectoriel des nombres cardinaux ne peut pas être maintenu dans les idéaux sans modification. Mais les travaux de MM. BRANDT, KRULL, ARTIN montrent que ces quotients forment des idéaux dans d'autres domaines d'intégrité et, en partant de ces résultats, on peut, dans des cas étendus, rétablir le caractère vectoriel des idéaux en formant la notion de *remplacement* d'un idéal par un autre. Ces idéaux *remplaçants* sont constitués des mêmes classes de restes prises selon la norme de l'idéal.

13. — H. BRANDT (Aachen). — *De la théorie générale des idéaux.* — L'auteur donne d'abord une théorie générale des modules pour une algèbre associative<sup>1</sup> quelconque  $\mathfrak{A}$  contenant une unité principale. Ici le terme module signifie un système de nombres de  $\mathfrak{A}$  qui contient avec  $\alpha, \beta, \dots$  aussi  $a\alpha + b\beta + \dots$  où  $a, b, \dots$  sont des nombres quelconques d'un système de coefficients  $\mathfrak{z}$  qu'on a choisi au central  $\mathfrak{Z}$  de  $\mathfrak{A}$  comme anneau avec unité principale.

Pour les modules on définit les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division comme Dedekind l'a fait pour les corps algébriques<sup>2</sup>. Quelques modifications sont causées par le fait que la multiplication n'est pas commutative. Par exemple, en désignant par  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  deux modules quelconques, on trouve, en général, le produit  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$  différent du produit  $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$ ; aussi peut-on former deux quotients avec le dénominateur  $\mathfrak{a}$  et le numérateur  $\mathfrak{b}$  qui sont désignés par les symboles  $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$  (c'est-à-dire  $\mathfrak{a}$  que  $\mathfrak{b}$  divise) et  $\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a}$  (c'est-à-dire  $\mathfrak{b}$  qui divise  $\mathfrak{a}$ ).

Chaque module comme  $\mathfrak{a}$  a son ordre droit  $\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$  et son ordre gauche  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0$ . En formant les quotients  $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a}^0$ , on trouvera toujours le même module qu'on nomme le module réciproque de  $\mathfrak{a}$  et qu'on désigne par  $\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{-1}$ . Si on a les égalités  $\mathfrak{a}^{-1} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$  et  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^0$ , on nomme  $\mathfrak{a}$  module réversible.

La multiplication générale  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$  définit  $\mathfrak{c}$  par  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$ , mais elle ne définit pas  $\mathfrak{a}$  par  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{c}$  ou  $\mathfrak{b}$  par  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{c}$ . C'est pourquoi l'auteur a construit le concept de multiplication *propre*. Ce cas se réalise quand on ne peut agrandir ni le système de nombres de  $\mathfrak{a}$  ni le système de nombres de  $\mathfrak{b}$  sans varier le produit  $\mathfrak{c}$ , et on écrit  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ . Pour les six ordres  $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}^0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}^0, \mathfrak{c}_0$  on trouve les égalités  $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{c}^0, \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}^0, \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}_0$ .

Tous les modules qui sont en connexion directe ou indirecte par une égalité de multiplication propre sont nommés conjoints. On a alors le théorème: Tous les modules réversibles conjoints à un ordre donné, soumis à la multiplication propre, forment un groupoïde infini<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> L. E. DICKSON. *Algebras and their arithmetics*, Chicago 1923 ou seconde édition en allemand, *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Zurich, 1927.

<sup>2</sup> DIRICHLET-DEDEKIND. *Zahlentheorie*, 4. Auflage, p. 493.

<sup>3</sup> H. BRANDT. *Ueber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*. Math. Annalen, 96 (1926), S. 360.

Si  $\mathfrak{A}$  est une algèbre rationnelle de Dedekind (c'est-à-dire une algèbre rationnelle sans radical) de l'ordre  $n$ , et  $\mathfrak{z}$  est le module des nombres naturels, le cas intéressant est surtout celui des modules finis qui possèdent une base de  $n$  nombres. Il se peut dans ce cas que tous les modules conjoints à un ordre donné, soient aussi réversibles. La condition suffisante et nécessaire pour cela est que *le complément de l'ordre soit réversible*. Cette condition est toujours remplie pour les ordres maximaux. On nomme idéal chaque module dont l'un (et par suite aussi l'autre) de ses ordres est maximal.

On a le théorème: Tous les idéaux d'une algèbre de Dedekind, soumis à la multiplication propre, forment un groupoïde infini.

Chaque idéal  $\mathfrak{a}$ , dont le produit  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$  est divisible par  $\mathfrak{a}$  (au sens admis pour les modules et idéaux) est nommé idéal intégral. Pour les idéaux intégraux on a ce théorème fondamental: Si  $\mathfrak{a}$  est divisible par  $\mathfrak{b}$  il y a deux idéaux intégraux  $\mathfrak{r}$  et  $\mathfrak{s}$  tels que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{s}$ .

C'est par ce théorème et les recherches de M. Speiser qu'on obtient toutes les lois de la factorisation des idéaux intégraux.

14. — P. FINSLER (Zurich). — *Formes quadratiques et variétés algébriques*. — La question de savoir sous quelles conditions une forme quadratique définie est contenue dans un système linéaire de formes quadratiques est liée à une classe particulière de variétés algébriques.

Les variétés algébriques les plus simples appartenant à l'espace de  $n$  dimensions, c'est-à-dire celles qui ne sont pas contenues dans un espace linéaire plus petit, et qui sont composées de parties irréductibles de dimensions  $p_i$  et d'ordres  $q_i$  satisfont à la condition  $\Sigma(p_i + q_i) = n + 1$ . Elles appartiennent en même temps que quelques autres variétés réductibles, aux « variétés libres », qu'on peut définir de la manière suivante:

Une variété algébrique  $G$  se nomme *libre*, si la section de  $G$  par un espace linéaire quelconque consiste toujours ou bien en une infinité de points ou bien seulement en des points linéairement indépendants.

La classification selon l'ordre correspond alors à la suivante:

Une variété algébrique  $G$  est d'*un degré de restriction*  $r$ , si le nombre des points d'intersection isolés de  $G$  avec un espace linéaire quelconque peut surpasser de  $r$  le nombre des points indépendants d'entre eux.

Il y a des théorèmes simples sur les variétés libres, qui sont valables même pour chaque position particulière. Ainsi par exemple, la section par un espace linéaire engendre en tout cas une variété libre.

De plus on a le théorème suivant: Une variété libre étant donnée dans l'espace réel, si elle est située d'un même côté d'une quadrique, on peut toujours faire passer, par la variété donnée, une autre quadrique ne touchant pas la première. Ce théorème ne subsiste que pour les seules variétés libres.

On en tire le corollaire suivant: Pour qu'une forme définie soit toujours contenue dans un système linéaire de formes quadratiques  $Q + \sum \lambda_i Q_i$  il faut et il suffit que  $\sum \lambda_i Q_i = 0$  représente le système de toutes les quadriques contenant une variété libre située entièrement dans l'un des domaines  $Q > 0$  ou  $Q < 0$ .

Il en résulte l'application suivante au calcul des variations:

Les conditions nécessaires et suffisantes, données par M. J. HADAMARD (*Bull. Soc. Math. de France*, 30 (1902)), pour un minimum d'une intégrale  $n$ -uple à  $m$  fonctions inconnues sont équivalentes entre elles pour  $m = 2$  ou  $n = 2$ , mais non plus pour  $m > 2$ ,  $n > 2$ .

15. — J.-J. BURCKHARDT (Bâle). — *L'algèbre du dièdre*. — Pour étudier la structure d'une algèbre, on la décomposera en une somme directe, c'est-à-dire une somme de sous-algèbres telles que le produit de deux quantités quelconques appartenant à des composantes différentes soit nul. Par ce procédé, nous avons étudié l'algèbre rationnelle dont les quantités de base se composent selon la structure du groupe du dièdre. En particulier, nous considérons comme dièdre le triangle équilatéral. L'algèbre correspondante se décompose en une somme directe de trois composantes: deux composantes d'ordre 1 (donc équivalentes aux corps des nombres rationnels) et une troisième d'ordre 4. Puisque chaque quantité de la troisième composante doit satisfaire à une équation quadratique, on arrive aisément à définir la norme:  $\eta_1^2 - \eta_1 \eta_2 + \eta_2^2 - (\eta_3^2 - \eta_3 \eta_4 + \eta_4^2)$  ( $\eta_1, \dots, \eta_4$  étant des nombres rationnels). On peut transformer cette forme quadratique par une transformation rationnelle dans la forme  $\xi_1 \xi_3 - \xi_2 \xi_4$ . En appliquant la transformation transposée de la précédente, aux quantités de base de la troisième composante, celle-ci se réduit à une algèbre de matrices.

Dans le cas général du dièdre ayant un nombre impair  $m$  d'angles, on peut séparer d'abord, d'une manière analogue, deux composantes d'ordre 1. La partie restante se décompose dans le corps des caractères (du groupe correspondant) en  $(m - 1)/2$  algèbres, par contre leur somme se représente rationnellement.

16. — Wolfgang KRULL (Fribourg en Br.). — *Sur les corps infinis algébriques*. — Il s'agit de généraliser pour le cas d'un corps infini algébrique le théorème que chaque idéal d'un corps fini algébrique peut être décomposé en idéaux simples (« Primideale » selon Dedekind). Voici les résultats:

1. Chaque idéal du domaine général (« Hauptordnung » selon Dedekind) d'un corps quelconque algébrique peut être représenté comme plus petit commun multiple d'un nombre (fini ou infini) d'idéaux unitaires, chaque idéal unitaire étant divisible par un seul idéal simple.

2. Dans un corps fini algébrique l'ensemble de tous les idéaux unitaires divisibles par le même idéal simple  $z$  est égal à l'ensemble des puissances de  $z$ . Dans le cas général, ce n'est pas la même chose. Mais chaque idéal unitaire peut être caractérisé par un nombre réel, la « valeur », et par un symbole « fini » ou « infini ».

3. Si chaque idéal du corps  $k$  n'est divisible que par un nombre fini d'idéaux simples les résultats indiqués suffisent pour distinguer si un idéal quelconque est diviseur ou facteur d'un autre ou non. Dans le cas général il faut se servir de certaines méthodes de la topologie que nous ne pouvons mentionner ici.

---

## CHRONIQUE

---

### Congrès International de Mathématiques

*Bologne, 3-10 sept., 1928.*

Le Congrès International de mathématiques, qui aura lieu à Bologne du 3 au 10 septembre 1928, est placé sous le haut Patronage de S. M. le Roi d'Italie et la présidence d'honneur S. E. Benito Mussolini, Chef du Gouvernement. Il est organisé sous les auspices du « Rector Magnificus » de l'Université de Bologne.

La Commission exécutive, présidée par M. le Prof. S. PINCHERLE, invite à participer aux travaux du congrès toutes les personnes qui cultivent les sciences mathématiques pures ou leurs applications.

Le Congrès tiendra des séances plénières et des réunions de sections. Le programme provisoire prévoit sept sections qui pourront être subdivisées elles-mêmes en un certain nombre de sous-sections. Les personnes qui ont l'intention de faire des communications sont priées de faire connaître le titre et le sujet de leur travail, avant le 31 mai 1928, à l'un des introducteurs de la section correspondante. On en trouvera la liste ci-après.

Les conférences et les communications effectivement lues au Congrès seront publiées dans les volumes des Actes du Congrès. Les manuscrits en langue étrangère (allemand, anglais, espagnol, français) en latin classique ou en latin *sine flexione* doivent être écrits à la machine, exception faite pour les formules. Chaque congressiste aura droit à un exemplaire gratuit des Actes du Congrès.

Pendant le congrès, des manuscrits, des estampes et autres docu-