SUR LES GÉODÉSIQUES DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES

Autor(en): **Roussel, André**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21249

SUR LES GÉODÉSIQUES DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES

PAR

André Roussel (Poitiers).

Le but de cet article est de montrer, qu'étant donné un élément linéaire:

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2 ,$$

où les fonctions E, F, G sont continues, satisfont aux relations:

$$E > 0 \qquad EG - F^2 > 0 , \qquad G > 0 , \tag{1}$$

et à une condition de Lipschitz d'ordre arbitraire, il est toujours possible de définir une géodésique joignant deux points (u_1, v_1), (u_2, v_2) arbitraires qui jouira de la propriété suivante: *elle admettra partout une tangente variant d'une façon continue.*

Soit dans le plan des (u, v) un domaine D simplement connexe, limité par un contour Γ dont tous les points appartiennent à D. Prenons dans D deux points A et B, et considérons toutes les courbes rectifiables joignant A à B intérieures à D. Soit C l'une d'elle, s la longueur de l'arc allant de A à son point courant. Le problème que nous nous proposons consiste à chercher s'il existe une courbe C_0 fournissant le minimum de l'intégrale:

$$J_c = \int_c \sqrt{E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\, ds$$

et à étudier ses propriétés. O J_c est *semi-continue inférieure* et la quantité sous le signe intégral est positive au sens strict. La méthode directe d'Hilbert-Lebesgue[1] et le théorème de M. Tonelli montrent immédiatement qu'il existe une courbe C_0 rectifiable fournissant l'extremum cherché. Nous nous proposons de montrer, en outre, que C_0 admet partout une tangente variant avec continuité pourvu que ni A ni B ne soient sur le contour Γ limitant D et soient assez près l'un de l'autre.

En vertu de (1) on pourra trouver trois nombres μ, ν, ξ tels que l'on ait dans D:

$$E > \mu > 0 \ , \qquad EG - F^2 > \nu > 0 \ , \qquad G > \xi > 0 \ .$$

Or, nous avons:

$$\left|\frac{du}{ds}\right| \leq 1 \ , \qquad \left|\frac{dv}{ds}\right| \leq 1 \ ;$$

il existera donc deux nombres positifs m et M tels que:

$$0 < m < \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} < M \ ,$$

d'où, L étant la longueur de C,

$$mL < J_C < ML \ ; \tag{2}$$

par suite, si δ est la plus courte distance de A à Γ, en prenant B assez voisin de A pour que

$$AB < \frac{m}{M}\delta \ ,$$

on aura pour toute courbe C d'origine A et ayant au moins un point sur Γ:

$$J_C > J_{AB} \ .$$

Il en résulte immédiatement que la courbe extrémale C_0 joignant AB est toute entière intérieure au sens strict au domaine D. Nous nous placerons désormais dans ce cas. Soient p_1 et p_2 deux points de C_0. Nous avons:

$$J_{\overline{p_1p_2}} \geq J_{\overset{\frown}{p_1p_2}}$$

[1] Cf. Leonida Tonelli. Fundamenti di Calcolo delle Variazioni (t. I, p. 292 et t. II, p. 5 à 8), Zanichelli, éditeur. — Voir aussi: A. Roussel: Recherches sur le Calcul des Variations (Thèse), *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, pages 398 à 403 et p. 416 à 422.

et par suite, d'après (2):

$$\mathrm{M} \times \text{corde } p_1 p_2 > m \times \text{arc } p_1 p_2$$

ou:

$$\frac{\text{arc } \overset{\frown}{p_1 p_2}}{\text{corde } p_1 p_2} < \frac{\mathrm{M}}{m} ; \tag{3}$$

ceci posé, soit p_1, p_2, p_3 trois points de C_0 d'abscisses

$$s_1 < s_2 < s_3 .$$

Soit (u_0, v_0) un point du segment de droite $p_1 p_3$. Posons:

$$\mathrm{E}(u_0, v_0) = \alpha ; \qquad \mathrm{F}(u_0, v_0) = \beta ; \qquad \mathrm{G}(u_0, v_0) = \gamma .$$

Désignons par λ la distance de p_1 à p_3, et posons encore:

$$\mathrm{J}'_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2}\, ds .$$

A tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif λ_0 tel que si

$$\lambda \leq \lambda_0$$

on ait:

$$\begin{aligned} &\left| \mathrm{J}_{\overline{p_1p_2}} - \mathrm{J}'_{\overline{p_1p_2}} \right| < k\lambda\varepsilon , \qquad \left| \mathrm{J}_{\overline{p_2p_3}} - \mathrm{J}'_{\overline{p_2p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon , \\ &\left| \mathrm{J}_{\overline{p_1p_3}} - \mathrm{J}'_{\overline{p_1p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon , \qquad \left| \mathrm{J}_{\overset{\frown}{p_1p_3}} - \mathrm{J}'_{\overset{\frown}{p_1p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon . \end{aligned} \tag{4}$$

cela résulte de la continuité de E, F, G et de l'inégalité (3). Désignons par θ_0 l'angle de direction de la corde $p_1 p_3$. Nous allons comparer les intégrales:

$$\mathrm{J}'_{\overset{\frown}{p_1p_3}} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}'_{\overline{p_1p_3}} .$$

Posons:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \frac{u'(\alpha \cos\theta_0 + \beta \sin\theta_0) + v'(\beta\cos\theta_0 + \gamma\sin\theta_0)}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta_0 + 2\beta\cos\theta_0\sin\theta_0 + \gamma\sin^2\theta_0}}\, ds .$$

On obtient cette intégrale en substituant au cône

$$z = \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2},$$

son plan tangent au point ($u' = \cos\theta_0$, $v' = \sin\theta_0$). Comme le cône tourne sa concavité vers les z positifs, on aura:

$$J'_{C} \geqq I_{C} \quad \text{et} \quad J'_{\overline{p_1p_3}} = I_{\overline{p_1p_3}}$$

où dans I l'expression sous le signe intégral est une différentielle exacte. On aura donc:

$$J'_{\smile\sigma} - J'_{\overline{p_1p_3}} = J'_{\smile\sigma} - I_{\overline{p_1p_3}} = J'_{\smile\sigma} - I_{\smile p_1p_3} = \Delta \tag{5}$$

le notation $\smile\sigma$ désignant *un arc quelconque* joignant p_1 à p_3. Nous allons d'abord établir la relation:

$$\Delta > k_1 \int_{\smile\sigma} \sin^2(\theta - \theta_0)\, ds \tag{6}$$

où K_1 désigne une constante numérique et $\theta(s)$ l'angle de direction de la tangente à $\smile\sigma$ au point de cet arc d'abscisse curviligne s. Or on a une identité de la forme:

$$\Delta = \int_{\smile\sigma} \Delta_1\, ds$$

et l'on voit immédiatement que l'on a:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \geqq{} & k'(\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \gamma y'^2)(\alpha x_0'^2 + 2\beta x'_0 y'_0 + \gamma y_0'^2) \\ & - k\{x'(\alpha x'_0 + \beta y'_0) + y'(\beta x'_0 + \gamma y'_0)\}^2 \\ \equiv{} & Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 \equiv F(x', y') \end{aligned}$$

$$(x' = \cos\theta, \quad y' = \sin'\theta, \quad x'_0 = \cos\theta_0, \; y'_0 = \sin\theta_0)$$

Alors les relations:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\;; \qquad B = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'}\;; \qquad C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$$

donnent sans peine:

$$\begin{aligned} A &= (\alpha\gamma - \beta^2)\, y_0'^2\,, \\ B &= -(\alpha\gamma - \beta^2)\, x_0' y_0'\,, \\ C &= (\alpha\gamma - \beta^2)\, x_0'^2\,, \end{aligned}$$

et:

$$F = k'(\alpha\beta - \gamma^2)\,[\cos^2\theta \sin^2\theta_0 - 2\sin\theta\sin\theta_0\cos\theta\cos\theta_0 + \sin^2\theta\cos^2\theta_0]\,,$$

où:

$$F = k'(\alpha\beta - \gamma^2)\sin^2(\theta - \theta_0) \; . \qquad (k' > 0)$$

D'où l'inégalité (6), qui nous montre d'abord que l'intégrale J' prise le long de toute courbe joignant deux points est plus grande que si on la prend le long du segment de droite qu'ils limitent.

Nous avons donc:

$$J'_{\overset{\smile}{p_1p_3}} \geqq J'_{\overline{p_1p_2}} + J'_{\overline{p_2p_3}} \qquad \text{et:}$$

$$J'_{\overset{\smile}{p_1p_3}} - J'_{\overline{p_1p_3}} \geqq J'_{\overset{\smile}{\sigma}} - J'_{\overline{p_1p_3}} = \Delta \; , \tag{7}$$

en prenant pour $\overset{\smile}{\sigma}$ la ligne brisée $p_1\,p_2\,p_3$. Désignons par θ_1 et θ_2 les angles de direction des côtés $p_1\,p_2$ et $p_2\,p_3$. Il vient d'après (6):

$$\Delta \geqq k_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_0) \times \overline{p_1p_2} + k_1 \sin^2(\theta_2 - \theta_0) \times \overline{p_2p_3} \; .$$

Revenons aux inégalités (4). Nous en tirons, en les comparant avec (7), la relation suivante:

$$J_{\overline{p_1p_3}} - J_{\overline{p_1p_3}} > k_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_0) \, . \, \overline{p_1p_2} + k_1 \sin^2(\theta_2 - \theta_0) \times \overline{p_2p_3} - 2k\lambda\varepsilon$$

le premier membre de cette inégalité est négatif; il en est donc de même du second et l'on en déduit:

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2(\theta_1 - \theta_0) < k'_1 \frac{\lambda}{\overline{p_1p_2}}\,\varepsilon \; , \qquad (\lambda = \overline{p_1p_3}) \\ &\sin^2(\theta_2 - \theta_0) < k'_1 \frac{\lambda}{\overline{p_2p_3}}\,\varepsilon \; . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Je dis alors que:

1º Si l'on a:

$$\frac{\overline{p_1p_2}}{\overline{p_2p_3}} < 1 \; ,$$

l'angle $\widehat{p_1p_3p_2}$ tend vers zéro avec λ.

2º Si:

$$\frac{\overline{p_2p_3}}{\overline{p_1p_2}} < 1 \; ,$$

l'angle $\widehat{p_2p_1p_3}$ tendra vers zéro avec λ.

3° Enfin s'il existe un nombre M donné une fois pour toutes tel que

$$\frac{1}{M} < \frac{\overline{p_1 p_3}}{\overline{p_1 p_2}} < M \ , \tag{9}$$

les angles $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ et $\widehat{p_2 p_1 p_3}$ tendent simultanément vers zéro.

En effet la seconde inégalité (8) donne:

$$\sin^2 \widehat{p_1 p_3 p_2} < k'_1 \frac{\overline{p_1 p_3}}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon < k'_1 \frac{\overline{p_1 p_2} + \overline{p_2 p_3}}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon < (k'_1 + 1) \varepsilon \ ,$$

or il est clair que l'angle $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ est aigu puisque $\overline{p_1 p_2}$ est plus petit que $\overline{p_2 p_3}$. Donc $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ tend bien vers zéro. La démonstration du second cas est alors identique à la précédente. Passons au cas où les inégalités (9) sont satisfaites. Le système (8) montre alors que sin $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ et sin $\widehat{p_2 p_1 p_3}$ tendent simultanément vers zéro, et notre proposition sera établie si nous montrons qu'aucun des deux angles $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ et $\widehat{p_2 p_1 p_3}$ n'est obtus quand $\overline{p_1 p_3} = \lambda$ est assez petit. En effet, dans le cas contraire, si nous considérons l'intégrale

$$J' = \int \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u' v' + \gamma v'^2} \, ds \ ,$$

il est clair que sa valeur le long du contour $p_1 p_2 p_3$ dépassera sa valeur le long de $\overline{p_1 p_3}$ d'une quantité du même ordre de grandeur que λ, qui par suite ne pourra devenir négative quand on en retranchera un infiniment petit du second ordre $2K\lambda\varepsilon$. Ceci posé nous allons montrer que C_0 admet partout une tangente variant avec continuité. Soit en effet M, M_1, M_2 trois points de C_0 d'abscisses curvilignes respectivement égales à s, $s - h$, $s + h$; désignons par θ_1, θ_2 les angles de direction des côtés $M_1 M$, MM_2. La différence: $|\theta_2 - \theta_1|$ tend vers zéro avec h ainsi qu'il résulte de l'inégalité (3) et de ce que nous venons de voir plus haut.

Faisons maintenant intervenir l'hypothèse faite au début, et qui porte que les fonctions E, F, G satisfont chacune à une condition de Lipschitz d'ordre arbitraire: $0 < \alpha_i \leqq 1$. On voit facilement d'après les inégalités (8) que l'on a une relation de la forme:

$$|\theta_2 - \theta_1| < kh^{\mu}$$

k étant une constante, μ un nombre positif compris entre 0 et 1. On aura donc aussi :

$$|\cos\theta_2 - \cos\theta_1| < kh^{\mu} \qquad |\sin\theta_2 - \sin\theta_1| < kh^{\mu}$$

On montrerait facilement alors, en employant la méthode analogue à celle utilisée dans le cas d'uue fonction d'une variable (*cf.* P. Montel, Sur les polynomes d'approximations. Bull. Soc. Math. Fran. 1918) qu'on peut former deux polynomes $P_n(s)$ et $Q_n(s)$ représentant respectivement $u_0(s)$ et $v_0(s)$ avec une approximation:

$$\rho < \frac{A}{n^{1+\alpha}}$$

Alors $u_0(s)$ et $v_0(s)$ admettent des dérivées $u_0'(s)$, $v_0'(s)$ continues.

SUR LES DÉPLACEMENTS ISOHODOÏQUES

PAR

V. HLAVATÝ (Prague).

---

1. EXPOSITION[1]. Désignons par X^{ν} les n paramètres d'une variété à $n(>1)$ dimensions, par $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} (\neq \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})$ les n^3 paramètres de son déplacement, que nous désignons par L_n. Il est bien connu que pendant la transformation des paramètres X (au jacobien $\Delta \neq 0$)

$$X = X('X) \tag{1}$$

les $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ se transforment d'après

$$'\Gamma^{\rho}_{\omega\pi} = \frac{\partial' X^{\rho}}{\partial X^{\nu}} \left(\frac{\partial X^{\lambda}}{\partial' X^{\omega}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial' X^{\pi}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 X^{\nu}}{\partial' X^{\omega}\, \partial' X^{\pi}} \right).$$

---

[1] Nous employons la symbolique de M. Schouten, exposée dans son livre *Der Ricci-Kalkül*. Berlin, 1924.