1. — Expression des éléments, du périmètre et de la surface du triangle des pieds des hauteurs en fonction des éléments du triangle donné.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Soient A_1, B_1, C_1 les sommets du triangle des pieds des hauteurs; a_1, b_1, c_1 ses côtés; α_1, β_1, γ_1 ses angles; h_1', h_1'', h_1''' ses hauteurs; r_1 et R_1 les rayons des cercles inscrit et circonscrit; u_1 son périmètre et S_1 sa surface.

Soient enfin respectivement r', r'', r''' les rayons des cercles inscrits dans les triangles aux sommets AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 et R', R'', R''' ceux des cercles circonscrits (à ces triangles).

1. — Expression des éléments, du périmètre et de la surface du triangle des pieds des hauteurs en fonction des éléments du triangle donné.

A. Angles. — Les hauteurs du triangle donné sont, comme on sait, les bissectrices des angles du triangle des pieds des hauteurs (fig. 1):

$$\sphericalangle AA_1C_1 = \sphericalangle AA_1B_1 = \frac{\alpha_1}{2} .$$

Le quadrilatère ABA_1B_1 étant inscriptible, on a

$$\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle ABB_1 ,$$

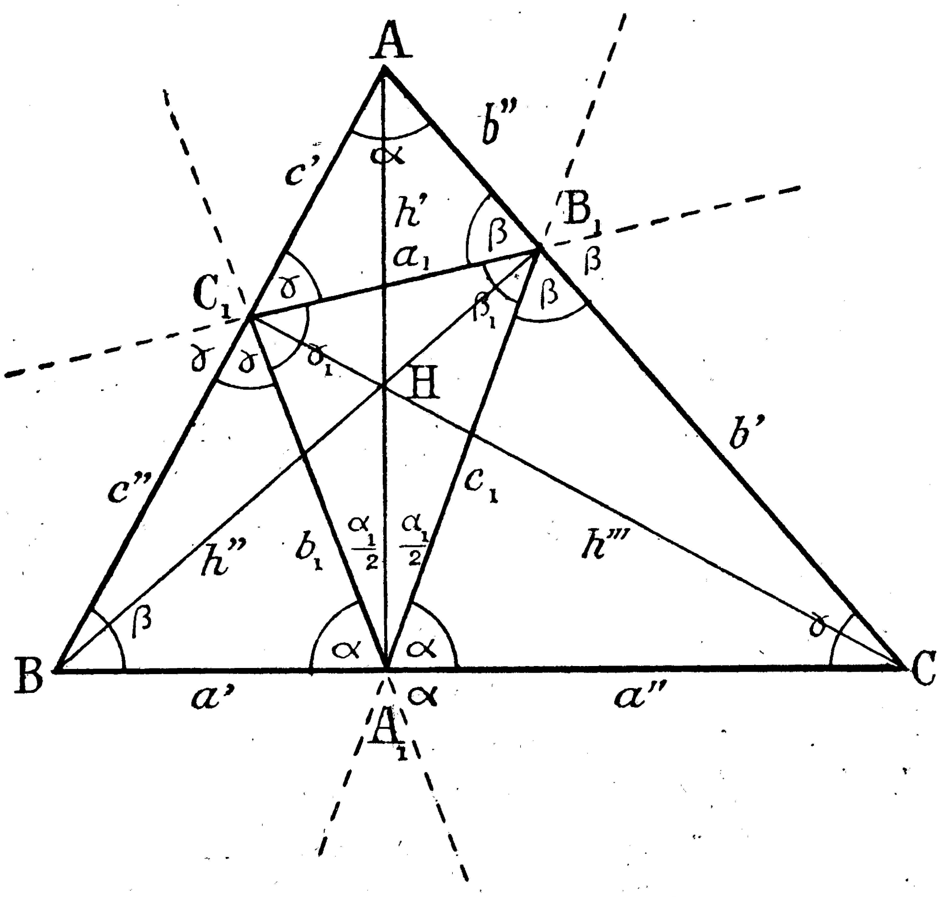

Fig. 1.

ou

$$\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ - \alpha \ ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 180^\circ - 2\alpha \ , \\ \beta_1 = 180^\circ - 2\beta \ , \\ \underline{\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma \ .} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Il en résulte

$$\left\{\begin{array}{l} \sphericalangle\, C_1A_1B = \sphericalangle\, B_1A_1C = \alpha \ , \\ \sphericalangle\, A_1B_1C = \sphericalangle\, C_1B_1A = \beta \ , \\ \sphericalangle\, B_1C_1A = \sphericalangle\, A_1C_1B = \gamma \ , \end{array}\right. \qquad (2)$$

c'est-à-dire:

Deux quelconques des côtés du triangle des pieds des hauteurs forment avec le côté sur lequel ils se coupent des angles égaux à l'angle compris entre les deux autres côtés du triangle donné.

Il en résulte :

1º *Les triangles aux sommets* (AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1) *sont semblables entre eux et au triangle* (ABC) *donné.*

2º *Les côtés du triangle donné sont les bissectrices des angles extérieurs du triangle des pieds des hauteurs.*

B. Côtés. — a) *Expression en fonction des côtés et des angles.*

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, ABC \text{ (fig. 1)}:$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c'}{b} = \cos\alpha \ ,$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = a\cos\alpha \ , \\ b_1 = b\cos\beta \ , \\ \underline{c_1 = c\cos\gamma \ ,} \end{array}\right. \qquad (3)$$

c'est-à-dire

Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal au côté correspondant du triangle donné multiplié par le cosinus de l'angle opposé.

b) *Expression en fonction des côtés seulement.*

De (fig. 1)

$$a_1 = a\cos\alpha$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

résulte

$$\underline{a_1 = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}} . \tag{4}$$

Les expressions correspondantes de b_1 et c_1 s'obtiennent par permutation circulaire.

C. Périmètre. — En désignant par u', u'' et u''' les périmètres des triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 semblables au triangle ABC de périmètre u, nous avons (fig. 1):

$$\frac{u'}{u} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha ,$$

d'où

$$\begin{cases} u' = u \cos\alpha ; \\ u'' = u \cos\beta , \\ u''' = u \cos\gamma ; \end{cases}$$

$$u' + u'' + u''' = u . (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ,$$

ou

$$u + u_1 = u . (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ,$$

d'où

$$u_1 = u . [\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1] .$$

En transformant la parenthèse en un produit, on trouve

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} .$$

Par suite

$$\underline{u_1 = u . \left[4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right]} , \tag{5}$$

formule calculable par logarithmes.

Mais

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R} . \tag{6}$$

Donc, en remplaçant

d'où

$$\begin{cases} \underline{u_1 = u . \frac{r}{R}} , \\ \underline{\frac{u_1}{u} = \frac{r}{R}} , \end{cases} \tag{7}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *Les périmètres du triangle des pieds des hauteurs et du triangle donné sont entre eux comme les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné.*

D. SURFACE. — a) *Première expression.* — Soient S′, S″, S‴ les surfaces des triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Ces triangles étant semblables au triangle ABC de surface S, nous avons (fig. 1):

$$\frac{S'}{S} = \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{a^2} = \cos^2 \alpha .$$

Par suite

$$\begin{aligned} S' &= S \cos^2 \alpha , \\ S'' &= S \cos^2 \beta , \\ S''' &= S \cos^2 \gamma ; \end{aligned}$$

$$S' + S'' + S''' = S . (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) ,$$

ou

$$S - S_1 = S . (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) ,$$

d'où

$$S_1 = S . [1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)] . \tag{8}$$

Mais

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{R - r_1}{R} . \tag{9}$$

On a donc

$$\left\{ \begin{aligned} &\underline{S_1 = S . \frac{r_1}{R}} , \\ &\underline{\frac{S_1}{S} = \frac{r_1}{R}} , \end{aligned} \right. \tag{10}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La surface du triangle des pieds des hauteurs est à la surface du triangle donné comme le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs est au rayon du cercle circonscrit au triangle donné.*

b) *Seconde expression.*

$$2S_1 = a_1 b_1 \sin \gamma_1 \qquad \text{(fig. 1)}$$

Mais

$$a_1 = a \cos \alpha , \qquad b_1 = b \cos \beta , \qquad \gamma_1 = 180 - 2\gamma ;$$

$$2S_1 = a \cos \alpha . b \cos \beta . \sin (2\gamma) ,$$

$$\sin (2\gamma) = 2 \sin \gamma \cos \gamma .$$

Par suite

$$S_1 = (ab \sin \gamma) . \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

ou

$$S_1 = 2S . (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) . \tag{11}$$

Remarques. — 1. Des formules (8) et (11) résulte

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1 , \tag{12}$$

ce qui est la *relation des cosinus.*

2. De (11) on tire

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{S_1}{2S} . \tag{13}$$

E. Rayon du cercle circonscrit (fig. 1). — Le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs n'étant autre que le cercle des neuf points, on a

$$R_1 = \frac{R}{2} , \tag{14}$$

c'est-à-dire

Le rayon du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

F. Rayon du cercle inscrit. — a) *Expression en fonction des angles et de* R (fig. 2).

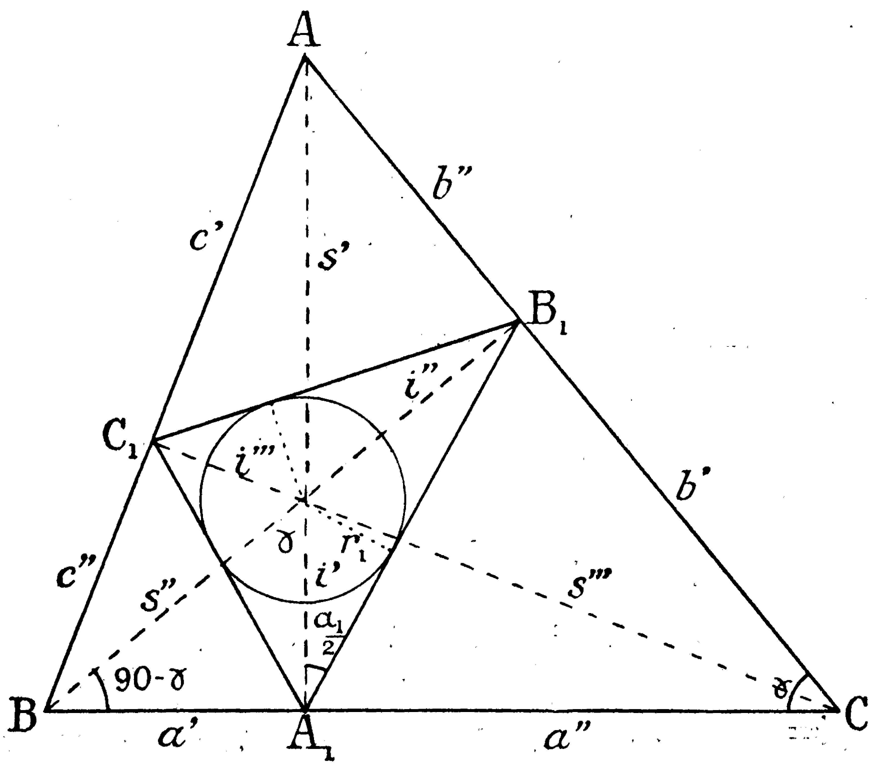

Fig. 2.

$$r_1 = i' \sin \frac{\alpha_1}{2} .$$

Or

$$i' = a' \operatorname{tg}(90 - \gamma) = c \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma$$

et

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha .$$

Donc

$$r_1 = (c \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma) \cos\alpha = \frac{c}{\sin\gamma} \cos\beta \cos\gamma \cos\alpha ,$$

ou

$$\underline{r_1 = 2\mathrm{R}(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) .} \qquad (15)$$

Remarque. — De (15) résulte

$$\underline{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r_1}{2\mathrm{R}} .} \qquad (16)$$

b) *Expression en fonction des côtés et de* R. *(Somme des carrés des côtés d'un triangle).*

1° Le rayon r du cercle inscrit dans un triangle ABC étant donné par la formule

$$r = (p - a) . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} ,$$

nous avons pour le rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs (fig. 2):

$$r_1 = (p_1 - a_1) . \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} - a_1\right) . \operatorname{cotg}\alpha ,$$

ou

$$r_1 = \left[\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{2} - a . \cos\alpha\right] . \operatorname{cotg}\alpha .$$

Mais

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a + b + c} = \frac{r}{\mathrm{R}} . \qquad (17)$$

Par suite

$$r_1 = \left[\frac{a + b + c}{2} . \frac{r}{\mathrm{R}} - a\cos\alpha\right] . \operatorname{cotg}\alpha =$$

$$= p . \frac{r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\alpha - \frac{a}{\sin\alpha} . \cos^2\alpha ;$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{p . r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\alpha - 2\mathrm{R} . \cos^2\alpha , \\[2ex] r_1 = \dfrac{p . r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\beta - 2\mathrm{R} . \cos^2\beta , \\[2ex] r_1 = \dfrac{p . r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\gamma - 2\mathrm{R} . \cos^2\gamma , \end{array}\right.$$

d'où

$$3r_1 = \frac{p \cdot r}{R} \cdot \left[\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma\right] - 2R\left(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\right) .$$

Or on trouve facilement

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} . \tag{18}$$

Remplaçons:

$$3r_1 = \frac{S}{R} \cdot \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}\right] - 2R(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) .$$

Mais (9)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{R - r_1}{R} .$$

Donc

$$3r_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} - 2(R - r_1) ,$$

d'où

$$\underline{r_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} - 2R} . \tag{19}$$

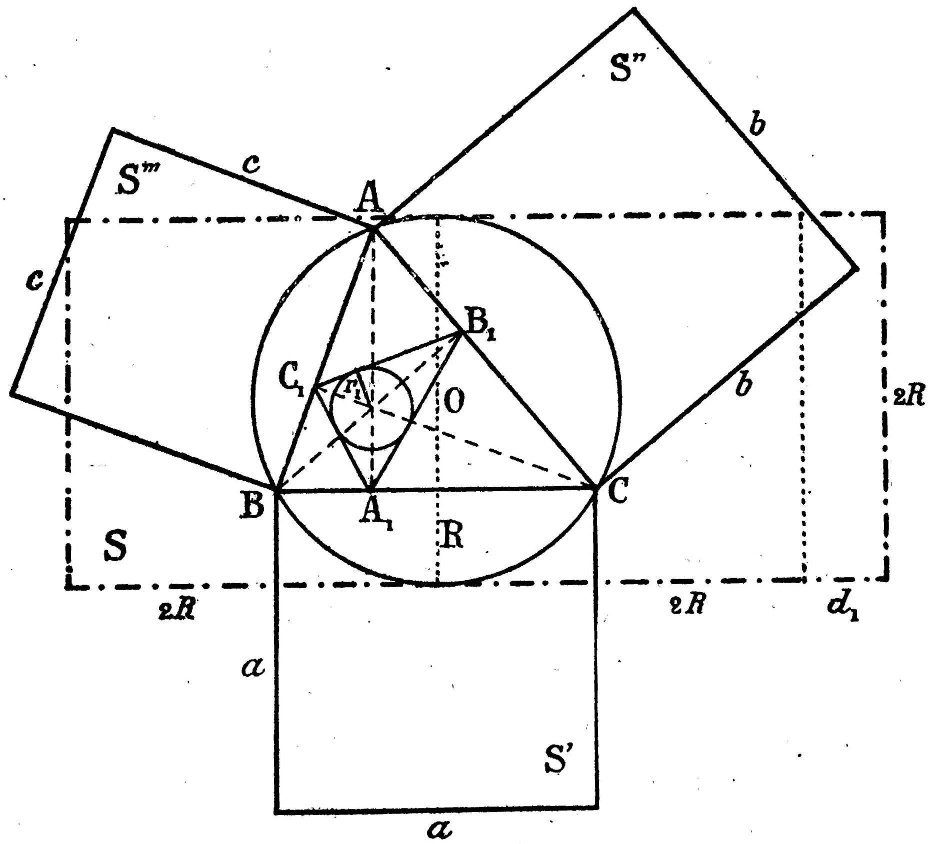

Fig. 3.

2° *(Conséquence).* — La formule obtenue pour r_1 conduit à une expression pour la *somme des carrés* des côtés du triangle donné. Il en résulte:

$$4Rr_1 = (a^2 + b^2 + c^2) - 8R^2$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 + 4Rr_1 = 4R^2 + 4R^2 + 2R \cdot 2r_1 ,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2R)^2 + (2R)^2 + 2R \cdot 2r_1 ,$$

ou

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 = D^2 + D^2 + D \cdot d_1 = D \cdot (2D + d_1) ,} \qquad (20)$$

ou (fig. 3) (20)' $S' + S'' + S''' = S$, c'est-à-dire

Théorème. — *La somme des carrés des côtés d'un triangle acutangle est égale à un rectangle ayant pour base le diamètre du cercle circonscrit et pour hauteur le double diamètre de ce cercle augmenté du diamètre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

Remarque. — Appliqué au triangle rectangle ($\alpha = 90°$), ce théorème conduit au théorème de Pythagore:

$$a^2 = b^2 + c^2 ,$$

car $D = a$ et $d_1 = 0$ ($S = 2S'$, $S'' + S''' = S'$).

G. Rayons des cercles ex-inscrits. — *Expression de la surface d'un triangle en fonction de* r, R *et* r_1. — La hauteur, issue de A, du triangle AB_1C_1 est le rayon r_{a_1} du cercle ex-inscrit au triangle des pieds des hauteurs, tangent à a_1 (fig. 4). Or

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, ABC :$$

$$\frac{r_{a_1}}{h'} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha .$$

Mais

$$r_{a_1} = h' \cdot \cos\alpha ; \qquad h' = b \sin\gamma ,$$

$$b = 2R \sin\beta , \qquad h' = 2R \sin\beta \sin\gamma ;$$

$$\left\{\begin{aligned} r_{a_1} &= 2R \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma , \\ r_{b_1} &= 2R \cos\beta \sin\gamma \sin\alpha , \\ r_{c_1} &= 2R \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta . \end{aligned}\right. \qquad (21)$$

Conséquences. — De ces formules résulte (fig. 4):

1°

$$r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = 8R^3 (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2 \; ,$$

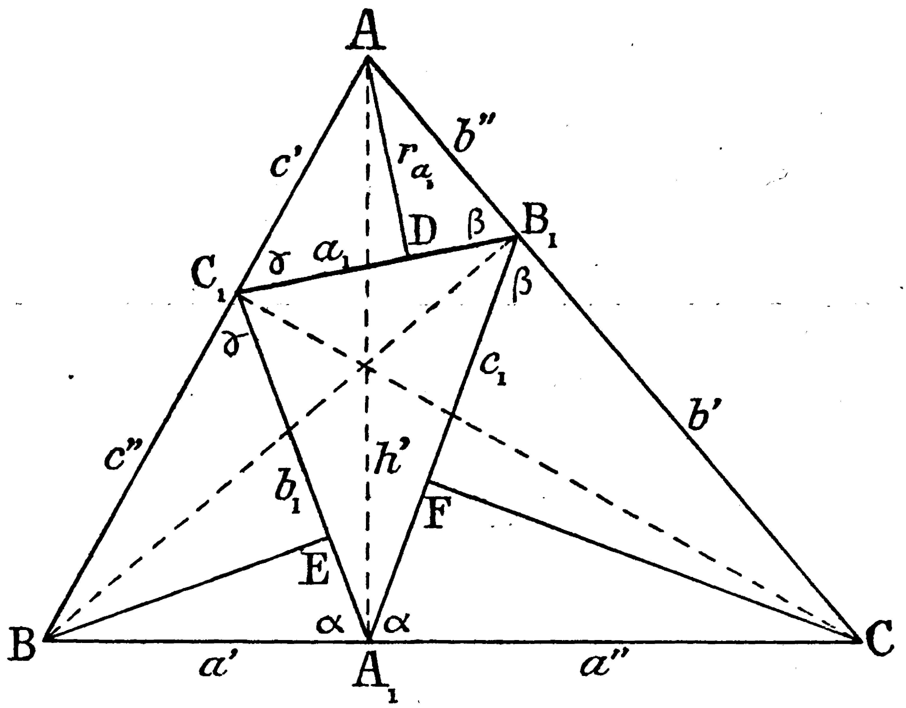

Fig. 4.

Mais (13)

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{S_1}{2S}$$

et

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{S}{2R^2} \; . \tag{22}$$

Par suite

$$r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = \frac{S_1 S}{R} \; , \quad \underline{D_1 \cdot r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = S_1 \cdot S} \; . \tag{23}$$

Or (10)

$$S_1 : S = r_1 : R \; , \qquad \text{d'où } R = \frac{r_1 S}{S_1} \; .$$

Donc

$$r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = \frac{S_1^2}{r_1} \; ,$$

d'où

$$\Delta\, A_1 B_1 C_1 \ldots\; r_1 \cdot r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = S_1^2$$

$$\Delta\, ABC \ldots\; \underline{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S^2} \tag{23'}$$

On retrouve ainsi une relation connue.

2°

$$r_{a_1} = 4R_1 \, . \cos\left(90 - \frac{\alpha_1}{2}\right) \sin\left(90 - \frac{\beta_1}{2}\right) \sin\left(90 - \frac{\gamma_1}{2}\right) ,$$

$$r_{a_1} = 4R_1 \sin\frac{\alpha_1}{2} \cos\frac{\beta_1}{2} \cos\frac{\gamma_1}{2} .$$

Donc

$$r_a = 4R \, . \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} .$$

Par suite

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = 64R^3 \left(\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 =$$

$$= 64R^3 \cdot \frac{r}{4R} \cdot \frac{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}{16} .$$

Or, de

$$h' + h'' + h''' = 2R[\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha] \quad (24)$$

et

$$h' + h'' + h''' = 2R + 4r + r_1 + \frac{r^2}{R} \quad (25)$$ [1]

résulte

$$\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha = \frac{r^2 + 2R^2 + 4rR + r_1 R}{2R^2} , \quad (26)$$

et de (9)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \frac{r_1}{R} . \quad (27)$$

Si l'on se base sur (26) et (27), la relation ci-dessus peut s'écrire

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = R^2 \, . \, r\left[\left(2 + \frac{r_1}{R}\right) + \frac{r^2 + 2R^2 + 4rR + r_1 R}{R^2}\right] =$$

$$= r \, . \, [r^2 + 4R^2 + 4rR + 2r_1 R] =$$

$$= r \, . \, [(r + 2R)^2 + 2r_1 R] ,$$

ou, en posant $2R = D$

$$\underline{r_a \cdot r_b \cdot r_c = r \, . \, [(r + D)^2 + r_1 D] .} \quad (28)$$

De (23) et (28) résulte

$$\underline{S^2 = r^2 \, . \, [(r + D)^2 + r_1 D] .} \quad (29)$$

---

[1] Arnold Streit: « Sur les hauteurs d'un triangle », *Enseignement Mathématique*, sept. 1926 (p. 44, formule 20).

Cette formule exprime la surface d'un triangle en fonction du rayon du cercle inscrit, du diamètre du cercle circonscrit et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

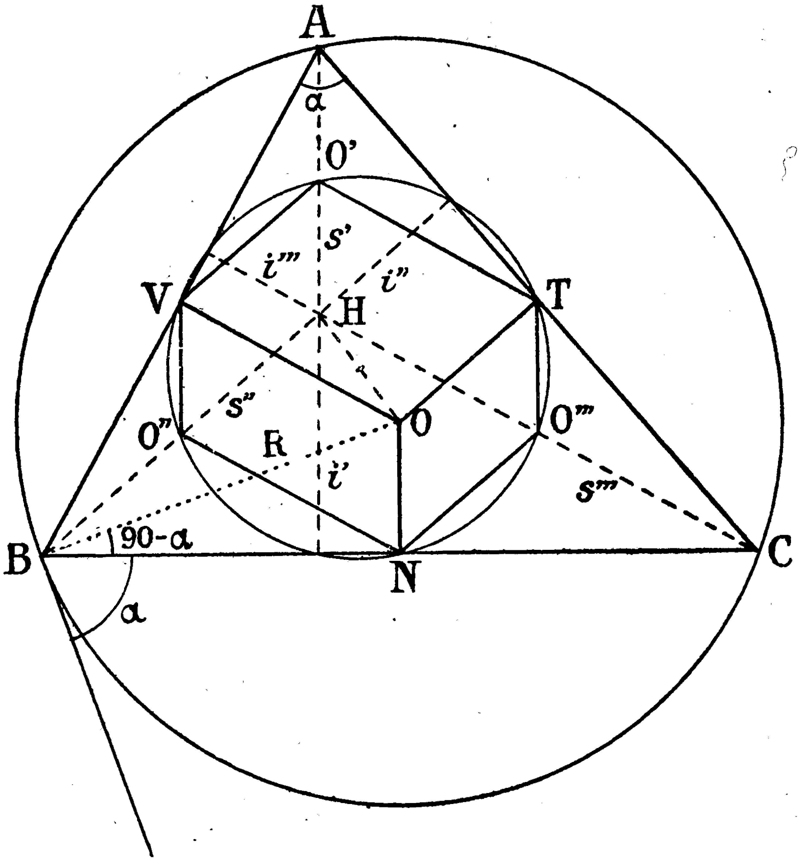

Fig. 5.

2. — Distances du centre du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés de ce triangle.

La figure (5) donne

$$ON = R \cos \alpha = \frac{s'}{2} ,$$

$$OT = R \cos \beta = \frac{s''}{2} ,$$

$$OV = R \cos \gamma = \frac{s'''}{2} ;$$

$$ON + OT + OV = \frac{1}{2}(s' + s'' + s''') .$$

Or

$$s' + s'' + s''' = 2(r + R) .[1] \tag{30}$$

[1] *Op. cité*, p. 42 (formule 11).