Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS

Kapitel: 2. — Distances du centre du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés de ce triangle.

Autor: Streit, Arnold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21251

Cette formule exprime la surface d'un triangle en fonction du rayon du cercle inscrit, du diamètre du cercle circonscrit et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

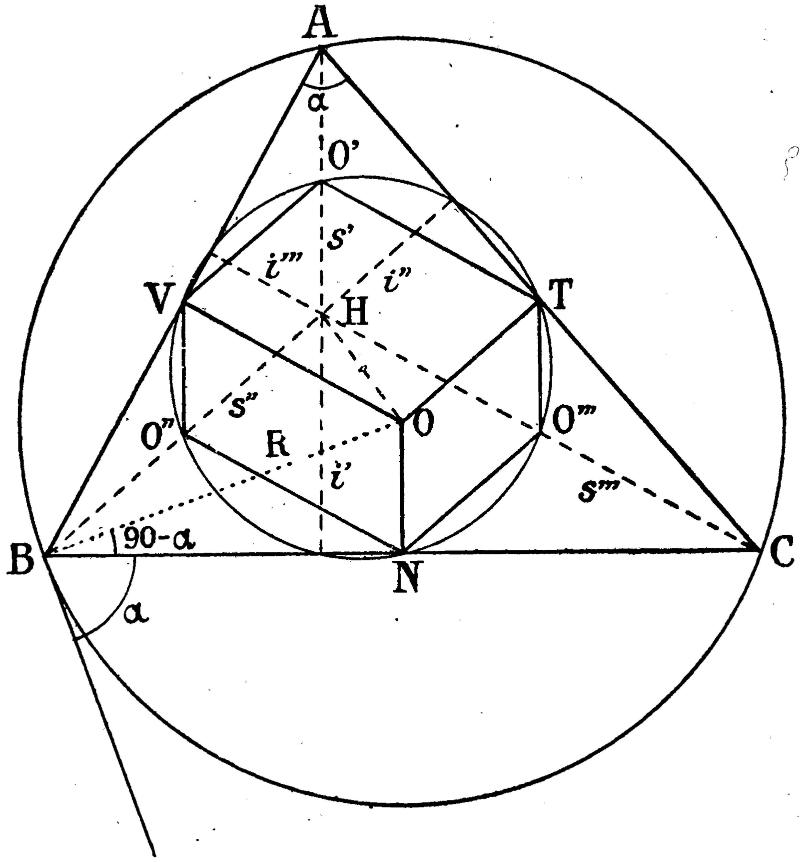

Fig. 5.

2. — Distances du centre du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés de ce triangle.

La figure (5) donne

$$ON = R \cos \alpha = \frac{s'}{2},$$

$$OT = R \cos \beta = \frac{s''}{2},$$

$$OV = R \cos \gamma = \frac{s'''}{2};$$

$$ON + OT + OV = \frac{1}{2}(s' + s'' + s''') .$$

Or

$$s' + s'' + s''' = 2(r + R) . ^{1} \tag{30}$$

[1] *Op. cité*, p. 42 (formule 11).

Donc

$$\underline{ON + OT + OV = r + R\ ,} \tag{31}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux côtés du triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.*

Conséquence. — Il en résulte que le périmètre de l'hexagone O′ VO″ NO‴ T est égal à 2 (r + R).

3. — Triangles aux sommets.

A. CERCLES INSCRITS. — Les triangles aux sommets $AB_1 C_1$, $BC_1 A_1$, $CA_1 B_1$ étant semblables au triangle ABC donné, nous avons (fig. 1):

$$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \qquad \frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha\ ,$$

d'où

$$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \qquad r' = r\cos\alpha\ ,$$
$$\Delta\ BC_1A_1 \ldots \qquad r'' = r\cos\beta\ ,$$
$$\Delta\ CA_1B_1 \ldots \qquad r''' = r\cos\gamma\ ,$$

c'est-à-dire

Le rayon du cercle inscrit dans l'un quelconque des triangles aux sommets est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle donné multiplié par le cosinus de l'angle commun.

Par suite

$$r' + r'' + r''' = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\ .$$

Or

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r + R}{R}\ . \tag{32}$$

Donc

$$\underline{r' + r'' + r''' = r + \frac{r^2}{R}}\ . \tag{33}$$

En outre

$$r'r''r''' = r^3(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\ .$$

Mais (16)

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2R}\ .$$