

3. — Triangles aux sommets.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Donc

$$\underline{ON + OT + OV = r + R}, \quad (31)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux côtés du triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.*

Conséquence. — Il en résulte que le périmètre de l'hexagone $O'VO''NO'''T$ est égal à $2(r + R)$.

3. — Triangles aux sommets.

A. CERCLES INSCRITS. — Les triangles aux sommets AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 étant semblables au triangle ABC donné, nous avons (fig. 1):

$$\Delta AB_1C_1 \dots \quad \frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos \alpha,$$

d'où

$$\Delta AB_1C_1 \dots \quad r' = r \cos \alpha,$$

$$\Delta BC_1A_1 \dots \quad r'' = r \cos \beta,$$

$$\Delta CA_1B_1 \dots \quad r''' = r \cos \gamma,$$

c'est-à-dire

Le rayon du cercle inscrit dans l'un quelconque des triangles aux sommets est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle donné multiplié par le cosinus de l'angle commun.

Par suite

$$r' + r'' + r''' = r(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

Or

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r + R}{R}. \quad (32)$$

Donc

$$\underline{r' + r'' + r''' = r + \frac{r^2}{R}}. \quad (33)$$

En outre

$$r' r'' r''' = r^3 (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Mais (16)

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{r_1}{2R}.$$

Donc

$$r' r'' r''' = \frac{r_1 r^3}{2R}$$

d'où

$$\underline{Dr' r'' r'''} = r_1 r^3 . \quad (34)$$

B. CERCLES CIRCONSCRITS. — Les angles $HB_1 A$ et $HC_1 A$ étant droits, AH (c'est-à-dire s') est le diamètre du cercle circonscrit au triangle $AB_1 C_1$ (fig. 1 et 12):

$$2R' = s' = 2R \cos \alpha ,$$

$$\Delta AB_1 C_1 \dots \quad R' = \frac{s'}{2} = R \cos \alpha ,$$

$$\Delta BC_1 A_1 \dots \quad R'' = \frac{s''}{2} = R \cos \beta ,$$

$$\Delta CA_1 B_1 \dots \quad R''' = \frac{s'''}{2} = R \cos \gamma .$$

Par suite

$$R' + R'' + R''' = \frac{1}{2}(s' + s'' + s''') .$$

Or (30)

$$s' + s'' + s''' = 2(r + R) .$$

Donc

$$\underline{R' + R'' + R''' = r + R} , \quad (35)$$

c'est-à-dire

La somme des rayons des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné.

En outre

$$2R' \cdot 2R'' \cdot 2R''' = s' s'' s''' .$$

Mais ¹

$$s' s'' s''' = r_1 D^2 . \quad (36)$$

Donc

$$D' \cdot D'' \cdot D''' = r_1 D^2 = d_1 \cdot D_1 \cdot D ,$$

d'où

$$\underline{R' \cdot R'' \cdot R''' = r_1 \cdot R_1 \cdot R} , \quad (37)$$

c'est-à-dire

¹ Op. cité, formule 22, p. 44.

Le produit des rayons des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est égal au produit des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle des pieds des hauteurs par le rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

C. DISTANCES DES CENTRES DES CERCLES CIRCONSCRITS AUX TRIANGLES AUX SOMMETS AUX CÔTÉS DU TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS. — Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné. On a (fig. 6 et 12):

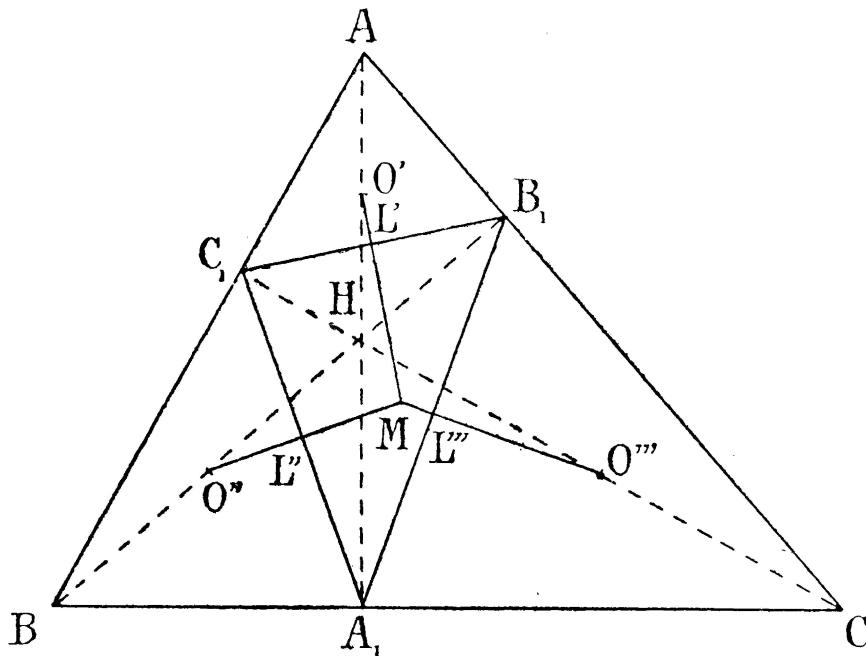


Fig. 6.

$$O'L' + O''L'' + O'''L''' = (O'M + O''M + O'''M) - (ML' + ML'' + ML''').$$

Or, M étant le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 B_1 C_1$ et ML' , ML'' , ML''' ses distances aux côtés de ce triangle, on a, en vertu de (31)

$$ML' + ML'' + ML''' = R_1 + r_1 .$$

En outre

$$O'M + O''M + O'''M = 3R_1 .$$

Remplaçons ci-dessus:

$$\underline{O'L' + O''L'' + O'''L'''} = 2R_1 - r_1 = R - r_1 , \quad (38)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets, — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné, — aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

La relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme suit (fig. 6 et 12):

Si du centre (M) du cercle circonscrit à un triangle ($A_1 B_1 C_1$) on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, la somme des segments compris entre les côtés et la circonférence (circonscrite) est égale à la différence entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.

4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

La figure (4) donne:

$$\left. \begin{array}{l} AD = c' \sin \gamma \\ BE = c'' \sin \gamma \end{array} \right\} AD + BE = c \sin \gamma ,$$

$$\left. \begin{array}{l} BE = a' \sin \alpha \\ CF = a'' \sin \alpha \end{array} \right\} BE + CF = a \sin \alpha ,$$

$$\left. \begin{array}{l} CF = b' \sin \beta \\ AD = b'' \sin \beta \end{array} \right\} CF + AD = b \sin \beta ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$2(AD + BE + CF) = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma .$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction des rayons R et r_1 :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R, \quad a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma;$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2R[\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma] .$$