Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 3. — Triangles aux sommets.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21251

Donc

$$\underline{\mathrm{ON} + \mathrm{OT} + \mathrm{OV} = r + \mathrm{R}\ ,} \tag{31}$$

c'est-à-dire

Théorème. — *La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux côtés du triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.*

Conséquence. — Il en résulte que le périmètre de l'hexagone $\mathrm{O'\,VO''\,NO'''\,T}$ est égal à $2\,(r + \mathrm{R})$.

3. — Triangles aux sommets.

A. Cercles inscrits. — Les triangles aux sommets $\mathrm{AB_1\,C_1}$, $\mathrm{BC_1\,A_1}$, $\mathrm{CA_1\,B_1}$ étant semblables au triangle ABC donné, nous avons (fig. 1):

$$\Delta\ \mathrm{AB_1\,C_1} \ldots \qquad \frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\Delta\ \mathrm{AB_1\,C_1} \ldots \qquad r' = r\cos\alpha\ ,\\
&\Delta\ \mathrm{BC_1\,A_1} \ldots \qquad r'' = r\cos\beta\ ,\\
&\Delta\ \mathrm{CA_1\,B_1} \ldots \qquad r''' = r\cos\gamma\ ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

Le rayon du cercle inscrit dans l'un quelconque des triangles aux sommets est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle donné multiplié par le cosinus de l'angle commun.

Par suite

$$r' + r'' + r''' = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\ .$$

Or

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r + \mathrm{R}}{\mathrm{R}}\ . \tag{32}$$

Donc

$$\underline{r' + r'' + r''' = r + \frac{r^2}{\mathrm{R}}\ .} \tag{33}$$

En outre

$$r'\,r''\,r''' = r^3(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\ .$$

Mais (16)

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2\mathrm{R}}\ .$$

Donc

$$r'r''r''' = \frac{r_1 r^3}{2R} ,$$

d'où

$$\underline{Dr'r''r''' = r_1 r^3 .} \tag{34}$$

B. Cercles circonscrits. — Les angles HB_1A et HC_1A étant droits, AH (c'est-à-dire s') est le diamètre du cercle circonscrit au triangle AB_1C_1 (fig. 1 et 12):

$$2R' = s' = 2R\cos\alpha ,$$

$$\Delta\, AB_1C_1 \ldots \quad R' = \frac{s'}{2} = R\cos\alpha ,$$

$$\Delta\, BC_1A_1 \ldots \quad R'' = \frac{s''}{2} = R\cos\beta ,$$

$$\Delta\, CA_1B_1 \ldots \quad R''' = \frac{s'''}{2} = R\cos\gamma .$$

Par suite

$$R' + R'' + R''' = \frac{1}{2}(s' + s'' + s''') .$$

Or (30)

$$s' + s'' + s''' = 2(r + R) .$$

Donc

$$\underline{R' + R'' + R''' = r + R ,} \tag{35}$$

c'est-à-dire

La somme des rayons des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné.

En outre

$$2R' . 2R'' . 2R''' = s's''s''' .$$

Mais [1]

$$s's''s''' = r_1 D^2 . \tag{36}$$

Donc

$$D' . D'' . D''' = r_1 D^2 = d_1 . D_1 . D ,$$

d'où

$$\underline{R' . R'' . R''' = r_1 . R_1 . R ,} \tag{37}$$

c'est-à-dire

[1] *Op. cité*, formule 22, p. 44.

Le produit des rayons des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est égal au produit des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle des pieds des hauteurs par le rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

C. Distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets aux côtés du triangle des pieds des hauteurs. — Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné. On a (fig. 6 et 12):

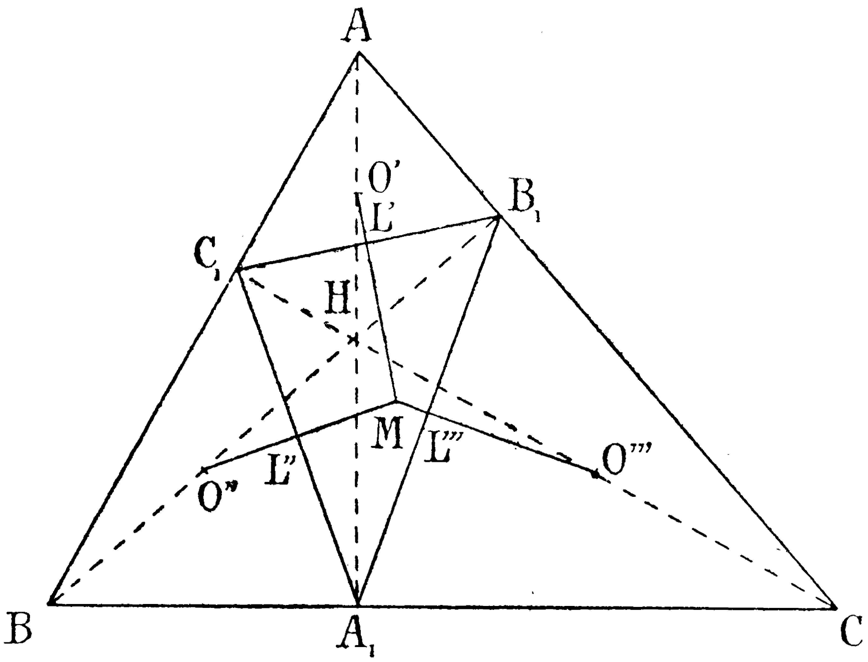

Fig. 6.

$$O'L' + O''L'' + O'''L''' = (O'M + O''M + O'''M) - (ML' + ML'' + ML''').$$

Or, M étant le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1\,B_1\,C_1$ et ML', ML'', ML''' ses distances aux côtés de ce triangle, on a, en vertu de (31)

$$ML' + ML'' + ML''' = R_1 + r_1 .$$

En outre

$$O'M + O''M + O'''M = 3R_1 .$$

Remplaçons ci-dessus:

$$\underline{O'L' + O''L'' + O'''L''' = 2R_1 - r_1 = R - r_1} , \qquad (38)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets, — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné, — aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

La relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme suit (fig. 6 et 12):

Si du centre (M) *du cercle circonscrit à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, la somme des segments compris entre les côtés et la circonférence (circonscrite) est égale à la différence entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.*

4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

La figure (4) donne:

$$\left.\begin{aligned} AD &= c' \sin\gamma \\ BE &= c'' \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad AD + BE = c \sin\gamma \,,$$

$$\left.\begin{aligned} BE &= a' \sin\alpha \\ CF &= a'' \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad BE + CF = a \sin\alpha \,,$$

$$\left.\begin{aligned} CF &= b' \sin\beta \\ AD &= b'' \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad CF + AD = b \sin\beta \,,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$2(AD + BE + CF) = a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma \,.$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction des rayons R et r_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \,, \quad a = 2R \sin\alpha \,, \quad b = 2R \sin\beta \,, \quad c = 2R \sin\gamma \,;$$

$$a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma = 2R[\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma] \,.$$