5. — Distances du centre O du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Or, d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1) . \tag{39}$$

Par suite

$$\underline{AD + BE + CF = 2R + r_1 ,} \tag{40}$$

c'est-à-dire

Théorème. — *La somme des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle donné augmenté du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

A, B, C étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs et AD, BE, CF leurs rayons, la relation ci-dessus peut s'écrire ($R = 2R_1$):

$$r_{a_1} + r_{b_1} + r_{c_1} = 4R_1 + r_1 ; \tag{40'}$$

$$\underline{r_a + r_b + r_c = 4R + r .} \tag{41}$$

Cette relation lie les rayons des cercles inscrit, circonscrit et ex-inscrits à un triangle. Elle peut s'énoncer comme suit:

Théorème. — *La somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle est égale au double diamètre du cercle circonscrit augmenté du rayon du cercle inscrit.*

5. — Distances du centre O du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs.

La fig. 7 (ou 12) donne:

$$OD + OE + OF = (OA + OB + OC) - (AD + BE + CF) .$$

Mais d'après (40)

$$AD + BE + CF = 2R + r_1 ,$$

et

$$OA + OB + OC = 3R .$$

Donc

$$OD + OE + OF = R - r_1 = 2R_1 - r_1 , \tag{42}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

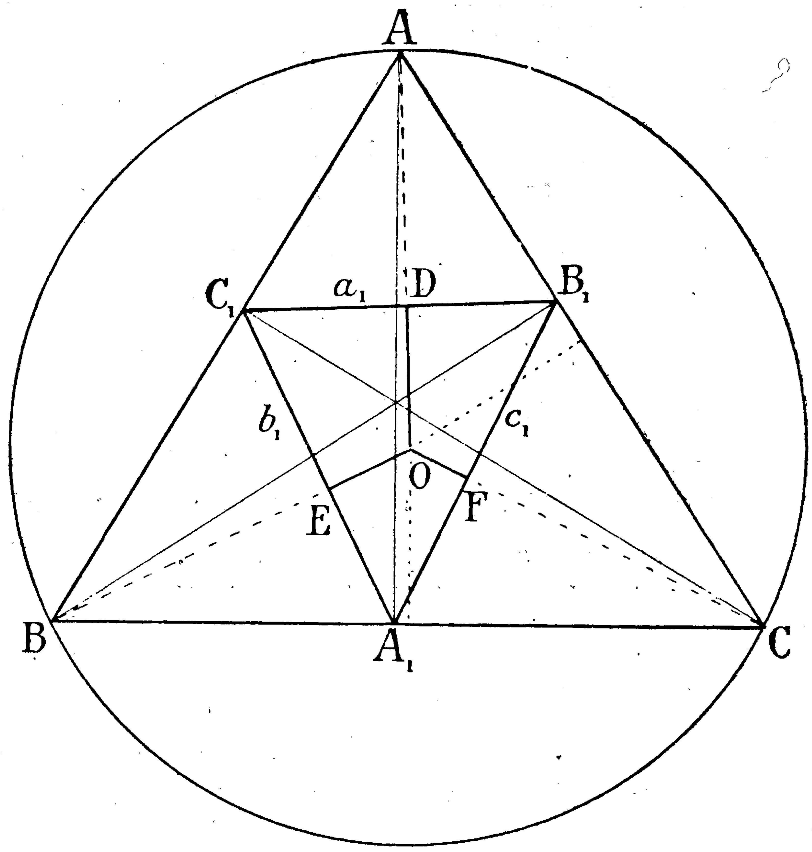

Fig. 7.

Des relations (38) et (42) résulte (fig. 12):

$$\underline{OD + OE + OF = O'L' + O''L'' + O'''L''' (= R - r_1)}, \quad (43)$$

c'est-à-dire

La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné — aux côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs.