10. — Droites se coupant en un même point.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Démonstration.

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, BC_1A_1 :$$
$$a_1 : c' = c'' : b_1 ;$$
$$\left\{\begin{aligned} a_1 b_1 &= c'c'' , \\ b_1 c_1 &= a'a'' , \\ c_1 a_1 &= b'b'' . \end{aligned}\right. \qquad (64)$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1° Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs:

Théorème 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD ; \quad \text{mais} \quad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 ; \quad \text{de même} \quad BO \perp b_1 \quad \text{et} \quad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1, b_1, c_1 passent donc par O.

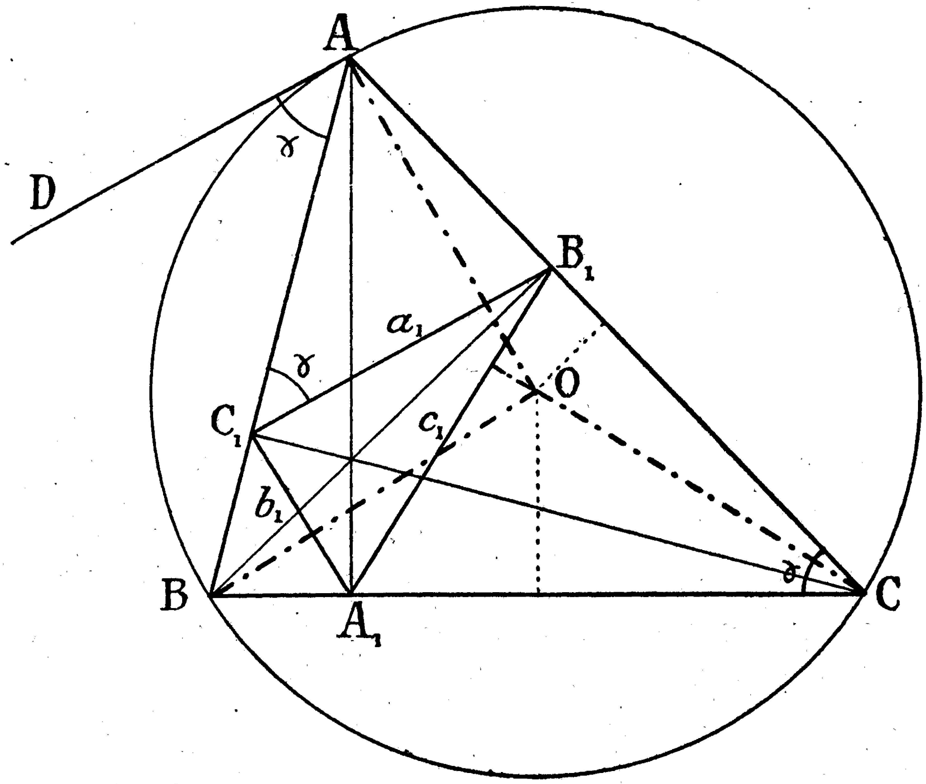

Fig. 15.

Remarque 1. — On peut aussi démontrer ce théorème en se basant sur la *réciproque du théorème de Ceva.*

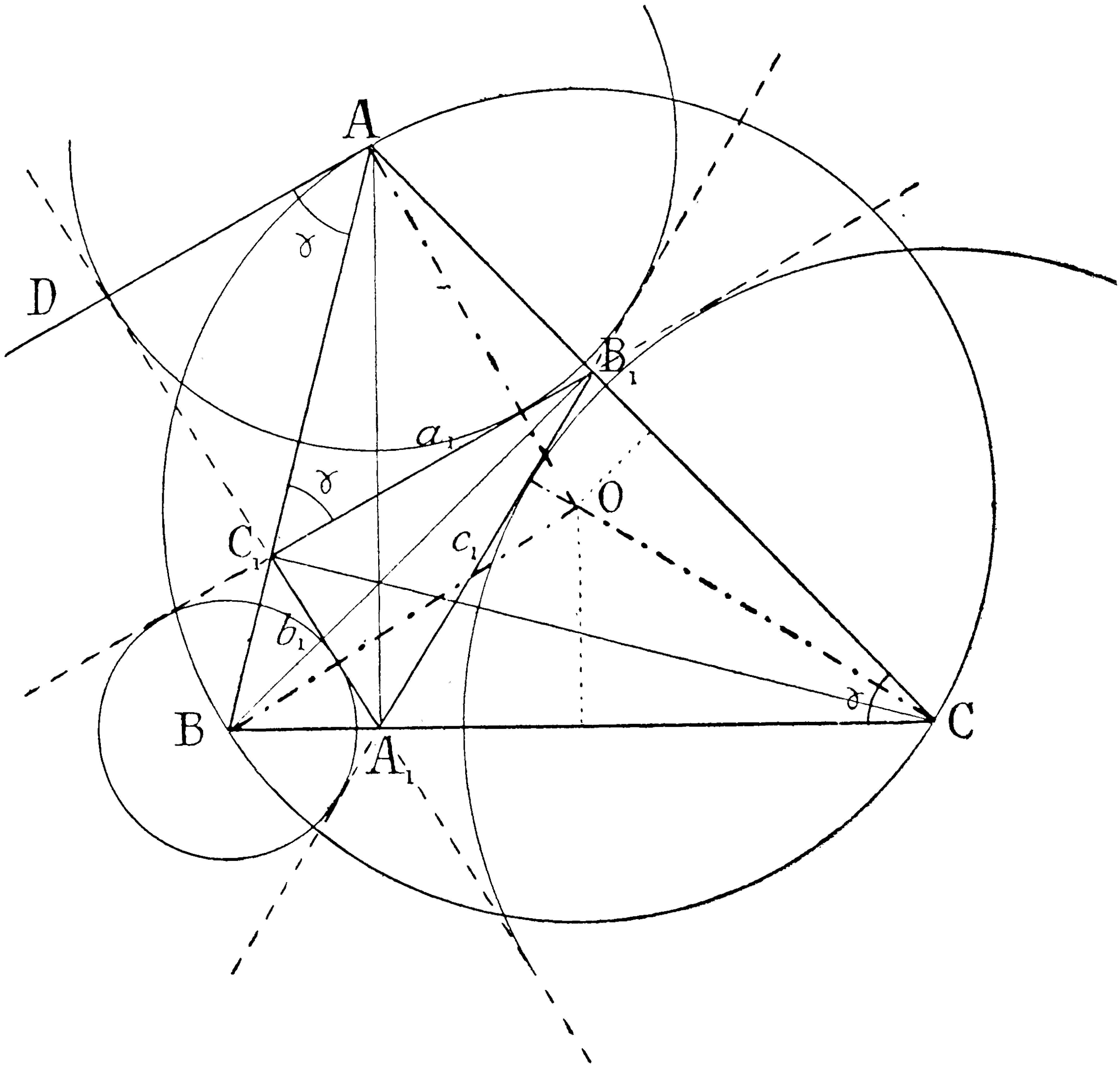

Fig. 16.

Remarque 2. — Les sommets du triangle donné (ABC) étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs (A_1 B_1 C_1), les perpendiculaires en question sont les rayons aboutissant aux points de contact des côtés (fig. 16). Le théorème ci-dessus peut donc aussi s'énoncer comme suit:

Théorème 1′. — *Si l'on construit les cercles ex-inscrits à un triangle* (A_1 B_1 C_1) *et les rayons aboutissant aux points de contact des côtés, les prolongements de ces trois rayons se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les centres* (A, B, C) *des cercles ex-inscrits* (fig. 16).

2° Abaissons, comme précédemment, de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs et joignons les pieds aux sommets opposés de ce second triangle:

THÉORÈME 2. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne les pieds de ces perpendiculaires aux sommets opposés de ce dernier triangle, les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point* (fig. 17).

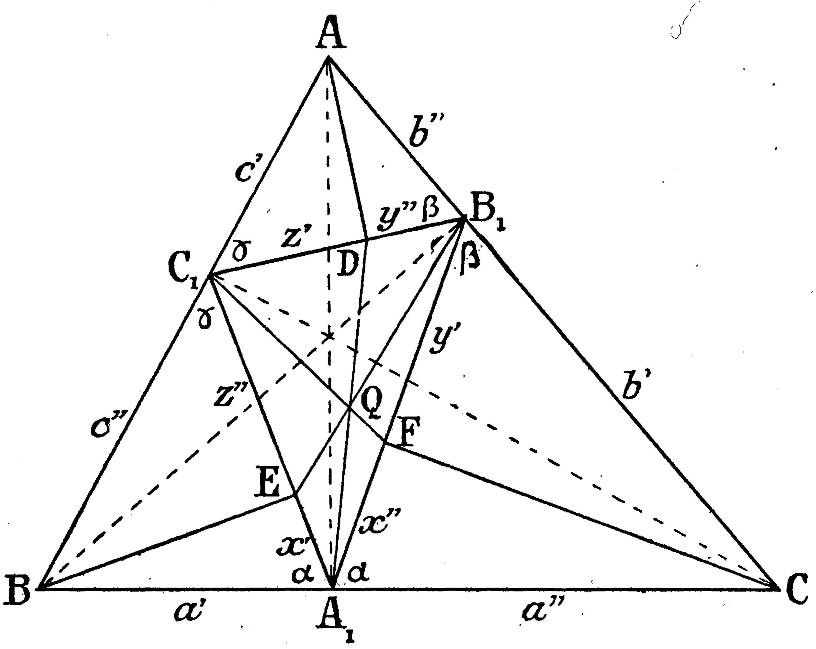

Fig. 17.

Démonstration.

$$x' = a' \cos\alpha\ , \qquad x'' = a'' \cos\alpha\ ,$$
$$y' = b' \cos\beta\ , \qquad y'' = b'' \cos\beta\ ,$$
$$z' = c' \cos\gamma\ , \qquad z'' = c'' \cos\gamma\ .$$

Mais

$$a' b' c' = a'' b'' c'' \text{(Théorème de Ceva)} .$$

Donc

$$\underline{x' y' z' = x'' y'' z''} \ . \tag{65}$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites $A_1 D$, $B_1 E$ et $C_1 F$ se coupent en un même point Q. Ce point est le *cinquième point remarquable* du triangle des pieds des hauteurs.

Remarque. — De (55) $A_1 E = B_1 D$, $C_1 D = A_1 F$, $B_1 F = C_1 E$ résulte aussi $A_1 E \,.\, C_1 D \,.\, B_1 F = A_1 F \,.\, B_1 D \,.\, C_1 E$.

3° Menons les bissectrices des angles d'un triangle et joignons leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs aux sommets opposés de ce 2me triangle:

THÉORÈME 3. — *Si l'on mène les bissectrices des angles d'un triangle jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne ces points d'intersection aux sommets opposés du second triangle, les trois transversales ainsi obtenues se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient G, N et T les points d'intersection des bissectrices avec les côtés respectifs a_1, b_1, c_1 (fig. 18):

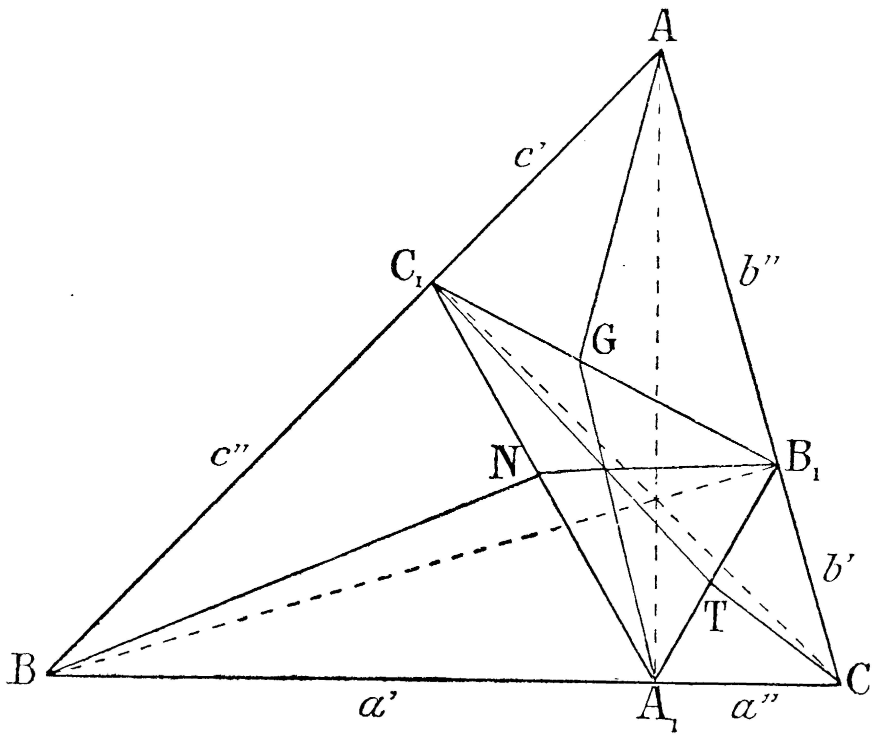

Fig. 18.

$$\Delta\ A_1B_1C \ \dots\ A_1T : B_1T = a'' : b' ,$$

$$\Delta\ B_1C_1A \ \dots\ B_1G : C_1G = b'' : c' ,$$

$$\Delta\ C_1A_1B \ \dots\ C_1N : A_1N = c'' : a' ,$$

d'où

$$A_1T \,.\, B_1G \,.\, C_1N : A_1N \,.\, C_1G \,.\, B_1T = a''b''c'' : a'b'c' .$$

Mais

$$a'b'c' = a''b''c'' .$$

Par suite

$$\underline{A_1T \cdot B_1G \cdot C_1N = A_1N \cdot C_1G \cdot B_1T\ .} \qquad (66)$$

Remarque. — Ce théorème peut être *généralisé:* on peut remplacer les trois hauteurs du triangle donné par trois transversales quelconques AA′, BB′, CC′ issues des sommets et se coupant en un même point: en menant les bissectrices des angles A, B, C jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle A′ B′ C′ et en joignant ces points aux sommets opposés A′, B′, C′, on obtient trois droites se coupant en un même point. (La démonstration est exactement la même.)

4° Construisons les hauteurs A_1 D, B_1 E, C_1 F du triangle des pieds des hauteurs et joignons leurs pieds D, E, F aux sommets correspondants A, B, C du triangle donné (fig. 19):

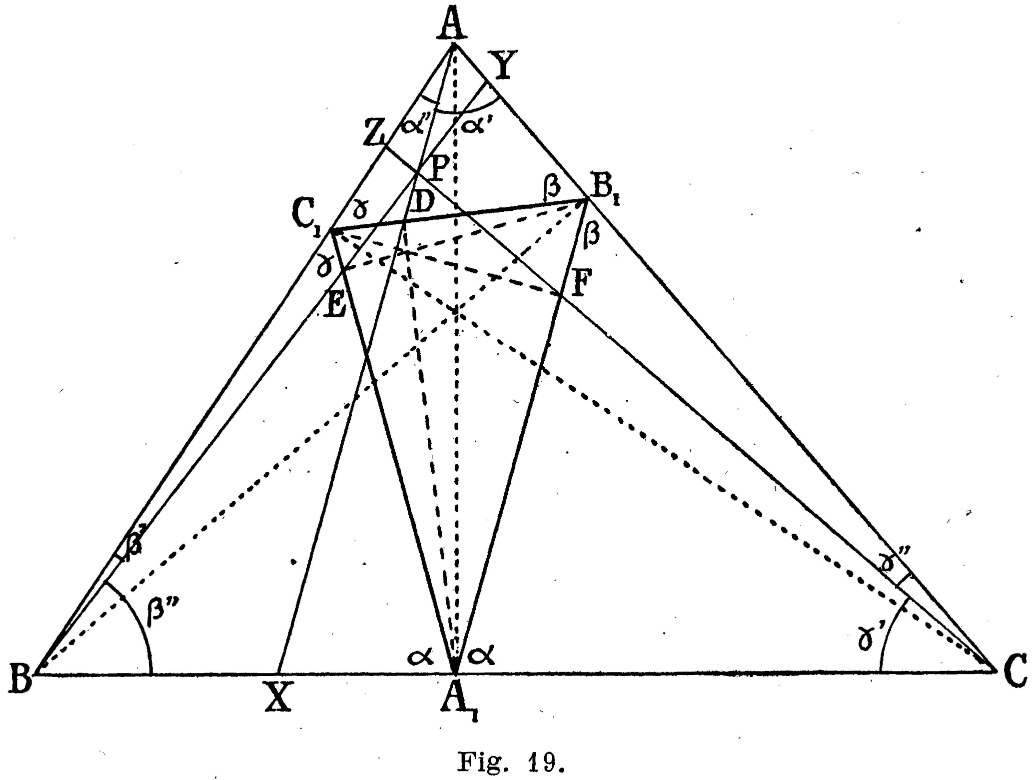

Fig. 19.

Théorème 4. — *Les droites de jonction des sommets d'un triangle aux pieds des hauteurs correspondantes du triangle des pieds des hauteurs se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient X, Y, Z les points d'intersection de ces droites de jonction avec les côtés respectifs a, b, c. En appliquant le théorème du sinus aux six triangles

CFA_1, CFB_1, ADB_1, ADC_1, BEC_1, BEA_1, on obtient

1) $A_1F : CF = \sin\gamma' : \sin\alpha$; 2) $CF : B_1F = \sin\beta : \sin\gamma''$;

3) $B_1D : AD = \sin\alpha' : \sin\beta$; 4) $AD : C_1D = \sin\gamma : \sin\alpha''$;

5) $C_1E : BE = \sin\beta' : \sin\gamma$; 6) $BE : A_1E = \sin\alpha : \sin\beta''$.

1) . 2) ... $A_1F : B_1F = \sin\beta\sin\gamma' : \sin\alpha\sin\gamma''$,

3) . 4) ... $B_1D : C_1D = \sin\gamma\sin\alpha' : \sin\beta\sin\alpha''$,

5) . 6) ... $C_1E : A_1E = \sin\alpha\sin\beta' : \sin\gamma\sin\beta''$,

d'où

$$\alpha)\ A_1F\,.\,B_1D\,.\,C_1E : A_1E\,.\,C_1D\,.\,B_1F = \sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma' : \sin\alpha''\sin\beta''\sin\gamma'' .$$

Appliqué aux six triangles CZA, CZB, AXB, AXC, BYC, BYA, le théorème du sinus donne

1)' $AY : BY = \sin\beta' : \sin\alpha$; 2)' $BY : CY = \sin\gamma : \sin\beta''$;

3)' $CX : AX = \sin\alpha' : \sin\gamma$; 4)' $AX : BX = \sin\beta : \sin\alpha''$;

5)' $BZ : CZ = \sin\gamma' : \sin\beta$; 6)' $CZ : AZ = \sin\alpha : \sin\gamma''$.

1)' . 2)' ... $AY : CY = \sin\gamma\sin\beta' : \sin\alpha\sin\beta''$,

3)' . 4)' ... $CX : BX = \sin\beta\sin\alpha' : \sin\gamma\sin\alpha''$,

5)' . 6)' ... $BZ : AZ = \sin\alpha\sin\gamma' : \sin\beta\sin\gamma''$,

d'où

$$\beta)\ AY\,.\,CX\,.\,BZ : AZ\,.\,BX\,.\,CY = \sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma' : \sin\alpha''\sin\beta''\sin\gamma'' .$$

De α) et β) résulte

$$AY\,.\,CX\,.\,BZ : AZ\,.\,BX\,.\,CY = A_1F\,.\,B_1D\,.\,C_1E : A_1E\,.\,C^1D\,.\,B_1F = 1 ,$$

car, d'après le théorème de Ceva appliqué aux hauteurs A_1D, B_1E et C_1F:

$$A_1F\,.\,B_1D\,.\,C_1E = A_1E\,.\,C_1D\,.\,B_1F .$$

Donc

$$\underline{AZ\,.\,BX\,.\,CY = AY\,.\,CX\,.\,BZ\ .} \qquad (67)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites AX, BY, CZ se coupent en un même point P.