11. — Points en ligne droite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

11. — Points en ligne droite.

1º Déterminons les points d'intersection X, Y, Z des côtés correspondants — ou leurs prolongements — d'un triangle et du triangle des pieds des hauteurs (fig. 20):

THÉORÈME 1. — *Les côtés correspondants — ou les prolongements des côtés — d'un triangle et du triangle des pieds des hauteurs se coupent en trois points en ligne droite.*

Démonstration. — 1er PROCÉDÉ. — Le théorème de *Menelaüs* appliqué aux trois transversales $A_1 B_1 Z$, $C_1 B_1 X$, $C_1 A_1 Y$ du triangle ABC donne successivement

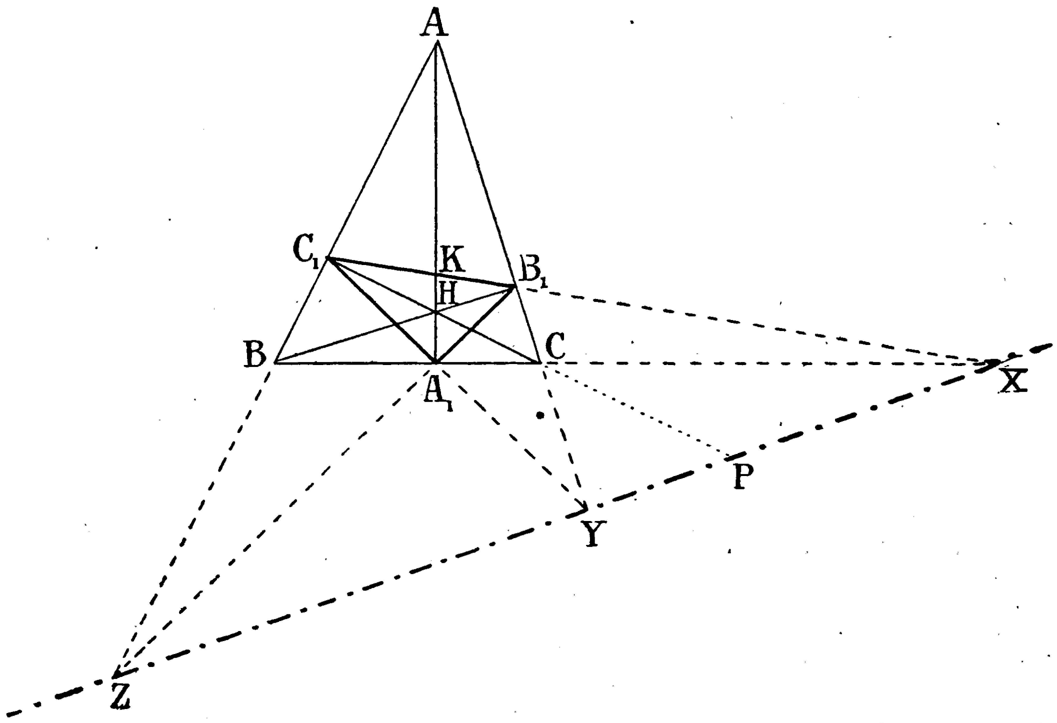

Fig. 20.

$$1)\quad \underline{AZ} \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot \underline{BZ}\ ,$$

$$2)\quad AC_1 \cdot \underline{BX} \cdot CB_1 = AB_1 \cdot \underline{CX} \cdot BC_1\ .$$

$$3)\quad AC_1 \cdot BA_1 \cdot \underline{CY} = \underline{AY} \cdot CA_1 \cdot BC_1\ .$$

En multipliant membre à membre, on obtient

$$\alpha)\ (AZ \cdot BX \cdot CY) \cdot (AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1)^2 = (AY \cdot CX \cdot BZ) \cdot (AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1)^2\ .$$

Or, d'après le théorème de *Ceva* appliqué aux hauteurs du triangle ABC, on a

$$4)\ AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1 = AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1 \,,$$

d'où

$$4)'\ (AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1)^2 = (AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1)^2 \,.$$

$$\alpha) : 4)' \ldots \underline{AZ \,.\, BX \,.\, CY = AY \,.\, CX \,.\, BZ\,.} \qquad (68)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Menelaüs, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

2^me^ PROCÉDÉ. — *Dans un quadrilatère complet, les trois diagonales se coupent harmoniquement.* Donc (fig. 20):

$$\text{Quadrilatère complet } CB_1HA_1AB \ldots 1)\ \frac{AZ}{BZ} = \frac{AC_1}{BC_1}\,,$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad AC_1HB_1BC \ldots 2)\ \frac{BX}{CX} = \frac{BA_1}{CA_1}\,,$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad BA_1HC_1CA \ldots 3)\ \frac{CY}{AY} = \frac{CB_1}{AB_1}\,.$$

Multiplions membre à membre:

$$\alpha)\ \frac{AZ \,.\, BX \,.\, CY}{AY \,.\, CX \,.\, BZ} = \frac{AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1}{AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1}\,.$$

Les transversales AA_1, BB_1, CC_1 (issues des sommets A, B, C) se coupant en un même point H, on a, d'après le théorème de Ceva

$$AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1 = AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1\,.$$

Le second membre de α) est donc égal à 1, par suite aussi le 1^er^; donc

$$\underline{AZ \,.\, BX \,.\, CY = AY \,.\, CX \,.\, BZ\,.}$$

D'après la réciproque du théorème de Menelaüs, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

Remarque. — Ce théorème peut être *généralisé:* En appliquant les mêmes procédés de démonstration au cas de trois transversales *quelconques* issues des sommets d'un triangle et se coupant en un même point, on aboutit au résultat suivant:

THÉORÈME 2. — *Si l'on mène par les sommets d'un triangle trois transversales se coupant en un même point et qu'on détermine leurs* *points d'intersection avec les côtés correspondants, les droites de jonction de ces trois points coupent les côtés respectifs du triangle en trois points en ligne droite.*

THÉORÈME 3. — *Chaque hauteur d'un triangle détermine sur la droite de jonction des points d'intersection* X, Y, Z *des côtés avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs le* 4^{me} *harmonique de ces points* X, Y, Z (fig. 20).

Démonstration. — Soit P le point d'intersection de la hauteur CC_1 avec la droite XY. Les quatre points A, K, H, A_1 forment un groupe harmonique, car la diagonale AH du quadrilatère complet $AC_1\ HB_1\ BC$ est coupée harmoniquement par les deux autres $C_1\ B_1$ et BC. En les projetant à partir du point C_1, on obtient le faisceau harmonique C_1 $(AKHA_1)$ et celui-ci coupe la droite XYZ en quatre points harmoniques ZXPY (c.q.f.d.).

2° On sait que le centre O du cercle circonscrit à un triangle, son centre de gravité G et l'orthocentre H sont en ligne droite $(GO = \frac{1}{2}\ GH)$. En se basant sur cette propriété et en appliquant la 7^{me} propriété (voir 8) au triangle IJK des pieds des hauteurs du triangle $O'\ O''\ O'''$ (ou la 10^{me} au triangle ABC), on est conduit au théorème suivant (fig. 12 et 21):

THÉORÈME 4. — *Le centre* O *du cercle circonscrit à un triangle donné, le centre de gravité* G, *le point* H *d'intersection des hauteurs (ou le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs), le centre* M *du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs (ou le centre du cercle passant par les points milieu* O', O'', O''' *des segments supérieurs des hauteurs), le centre de gravité* G' *du triangle ayant pour sommets les points milieu des segments supérieurs des hauteurs et le centre* M' *du cercle passant par les points milieu des segments inférieurs des hauteurs sont (6 points) en ligne droite.*

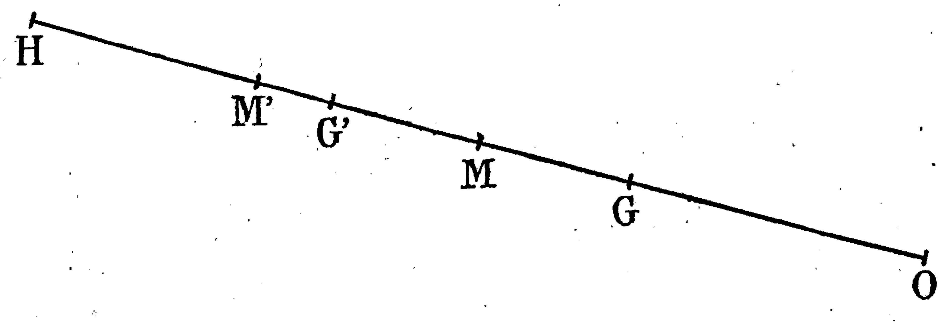

Fig. 21.

Positions relatives de ces points:

$$\mathrm{HG} = 2 \,.\, \mathrm{GO}\ , \quad \mathrm{HM} = \mathrm{MO}\ , \quad \mathrm{HG}' = 2 \,.\, \mathrm{G'M}\ , \quad \mathrm{HM}' = \mathrm{M'M} = \frac{1}{4}\,\mathrm{HO}\ ,$$

$$\mathrm{HG}' = \mathrm{G'G}\ .$$

Rayons des cercles en question:

$$\mathrm{OA} = \mathrm{R}\ , \qquad \mathrm{MA}_1 = \mathrm{R}_1 = \frac{\mathrm{R}}{2}\ , \qquad \mathrm{M'I} = \frac{\mathrm{R}_1}{2} = \frac{\mathrm{R}}{4}\ .$$

3° On sait que l'orthocentre H d'un triangle, le point d'intersection Q des transversales joignant les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits, le centre O du cercle circonscrit et le centre C′ du cercle inscrit sont les quatre sommets d'un trapèze dont les diagonales se coupent au centre de gravité G du triangle (fig. 22). La grande base HQ est le double de la petite

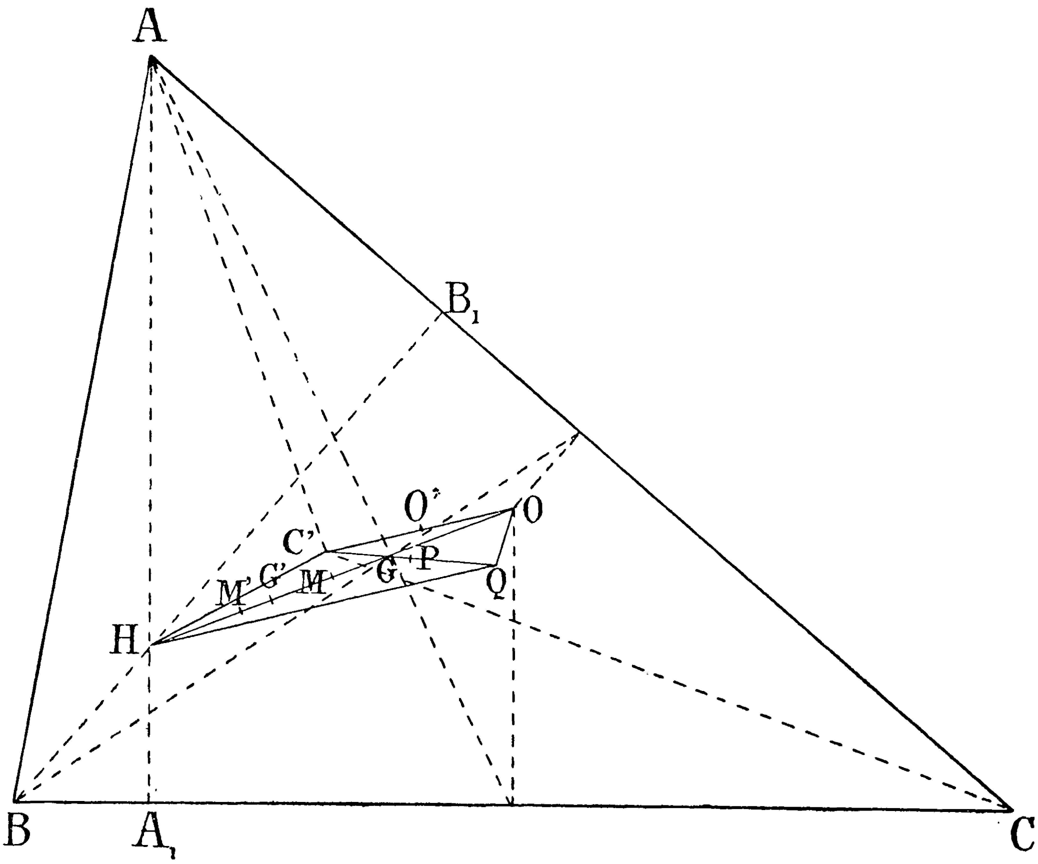

Fig. 22.

base C′ O. Ces points H, G, O, C′, Q sont les 5 points remarquables du triangle. Le point milieu M de la diagonale HO est le centre du « cercle des 9 points », donc le centre du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs et le point milieu P de la diagonale C′ Q, le centre du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les points milieu des côtés du triangle donné.

D'après ce qui précède, nous sommes à même de fixer, sur la petite base C′ O et la diagonale HO du trapèze, les positions de 3 nouveaux points qui sont:

1. Le centre O′ du cercle passant par les points milieu des segments supérieurs des bissectrices: il est situé au milieu de la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit (voir 8, 11me propriété), donc au milieu de la petite base C′ O du trapèze;
2. Le centre M′ du cercle passant par les points milieu des segments inférieurs des hauteurs: il se trouve au milieu de HM, donc au quart de la diagonale HO à partir de l'orthocentre H;
3. Le centre de gravité G′ du triangle ayant pour sommets les points milieu des segments supérieurs des hauteurs: il est au milieu du segment HG de la diagonale HO.

En résumé (fig. 22):

$$HQ = 2 \, . \, C'O \; ; \qquad HM = MO \; ; \qquad C'P = PQ \; ;$$
$$C'O' = O'O \; ; \qquad HM' = M'M \; ; \qquad HG' = G'G = GO \; .$$

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article sur les hauteurs d'un triangle.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt le travail sur les hauteurs d'un triangle publié par M. Streit dans l'*Enseign. Math.* (Tome XXV, p. 22-45, 1926). Permettez-moi de faire remarquer que le résultat exposé au § 4 (p. 31-32) n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale. En effet, en remplaçant les hauteurs par les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du plan du triangle sur les côtés, on trouve encore que les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs sont égales.