SUR LES PETITES OSCILLATIONS, D'UN SYSTÈME POSSÉDANT UNE FONCTION DES FORCES, AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE

SUR LES PETITES OSCILLATIONS, D'UN SYSTÈME POSSÉDANT UNE FONCTION DES FORCES, AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE

PAR

Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

On enseigne aujourd'hui, dans tous les cours de Mécanique rationnelle, le théorème de Lejeune-Dirichlet, d'après lequel une position d'équilibre d'un système matériel possédant une fonction des forces U, dans laquelle U est maximum, constitue une position stable. Mais, en supposant que la position du système dont on cherche l'équilibre dépende de k paramètres arbitraires $q_1, q_2, \ldots, q_k$, nuls dans la position d'équilibre considérée et que le maximum correspondant de U soit zéro, le développement de U, par la formule de Mac-Laurin, commence par un groupe φ de termes d'un degré pair quelconque, négatif quels que soient les q_i;

$$U = -\varphi + U_1 ,$$

U_1 étant l'ensemble des termes de degré supérieur.

La demi-force vive du système peut être supposée mise sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} q_i' q_j' + T_1 , \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

où les coefficients a_{ij} sont constants et où la forme quadratique Σ est positive, T_1 désignant une fonction des q_i et des q_i' homogène et du second ordre en q_i' avec des coefficients s'annulant pour

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0 .$$

On suppose habituellement, dans les cours, que φ est une forme quadratique des q_i

$$\varphi = \Sigma\, \alpha_{ij}\, q_i\, q_j \ , . \qquad\qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

et on néglige U_1 et T_1. Mais φ peut être d'un degré pair quelconque supérieur à 2; les oscillations du système ont alors une durée qui dépend de leur amplitude. Il est important d'envisager ce cas qui s'impose; c'est ce que j'ai fait sommairement dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. 185, 29 août 1927, pp. 487-489). Nous développerons ici les calculs en supposant φ de degré 4.

Premier cas, $k = 1$. (Système à liaisons complètes). — Nous prendrons

$$U = -\frac{\alpha}{4} q^4 , \qquad T = \frac{a}{2} q'^4 .$$

L'équation approchée du mouvement est, d'après Lagrange,

$$aq'' = -\alpha q^3 \qquad \text{ou} \qquad q'' = -r^2 q^3 ,$$

en posant $\alpha = ar^2$. On en déduit

$$q' = -\frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{q_0^4 - q^4} ,$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}} t = -\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{q_0^4 - q^4}} ,$$

avec q_0 valeur de q pour $t = 0$. En faisant $q = q_0 s$,

$$\frac{r}{\sqrt{2}} t = -\frac{1}{q_0} \int_1^s \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}} ,$$

ce qui donne q par une fonction elliptique de t. Le temps τ que met q partant de q_0 pour devenir nul est

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{rq_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}} ;$$

il est en raison inverse de q_0. Ce cas se présente quand, Oz étant vertical ascendant, on étudie, dans le voisinage de O, les petits mouvements d'un point pesant mobile sur la courbe

$$y = 0 \ , \qquad 4z = x^4 \ .$$

Alors

$$T = \frac{m}{2} x'^2 + \frac{m}{2} x^6 x'^2 = \frac{m}{2} x'^2 + T_1 \ ,$$

$$U = - mgz = - mg \frac{x^4}{4} \ , \qquad q = x \ .$$

Deuxième cas, $k = 2$. — Nous désignerons les deux paramètres par p et q; alors

$$2\,T = ap'^2 + 2bp'q' + cq'^2 + 2\,T_1 \ ,$$

et nous prendrons

$$\varphi = \frac{1}{4} (\alpha_1 p^4 + 4\alpha_2 p^3 q + 6\alpha_3 p^2 q^2 + 4\alpha_4 p q^3 + \alpha_5 q^4) \ ,$$

$$U = - \varphi + U_1 \ .$$

Les coefficients α_i sont tels que φ soit positif quels que soient p et q. En négligeant T_1 et U_1 on a, pour équations approchées du mouvement,

$$ap'' + bq'' = - \frac{\partial \varphi}{\partial p} = - (\alpha_1 p^3 + 3\alpha_2 p^2 q + 3\alpha_3 p q^2 + \alpha_4 q^3) \ ,$$

$$bp'' + cq'' = - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = - (\alpha_2 p^3 + 3\alpha_3 p^2 q + 3\alpha_4 p q^2 + \alpha_5 q^3) \ ,$$

les accents désignant des dérivées par rapport au temps.

Il serait intéressant d'intégrer ces équations. Nous nous bornerons à chercher des solutions telles que $p = \lambda q$, λ étant une constante réelle non nulle. Les équations du mouvement sont alors

$$(a\lambda + b)\, q'' = - q^3 (\alpha_1 \lambda^3 + 3\alpha_2 \lambda^2 + 3\alpha_3 \lambda + \alpha_4) \ ,$$

$$(b\lambda + c)\, q'' = - q^3 (\alpha_2 \lambda^3 + 3\alpha_3 \lambda^2 + 3\alpha_4 \lambda + \alpha_5) \ ,$$

d'où en éliminant $q'' : q^3$ l'équation biquadratique en λ

$$(a\lambda + b)(\alpha_2 \lambda^3 + 3\alpha_3 \lambda^2 + 3\alpha_4 \lambda + \alpha_5) \\ - (b\lambda + c)(\alpha_1 \lambda^3 + 3\alpha_2 \lambda^2 + 3\alpha_3 \lambda + \alpha_4) = 0$$

dont sont admissibles seulement les racines réelles non nulles rendant positive la quantité

$$\mu = \frac{\alpha_1 \lambda^3 + 3\alpha_2 \lambda^2 + 3\alpha_3 \lambda + \alpha_4}{a\lambda + b} = \frac{\alpha_2 \lambda^3 + 3\alpha_3 \lambda^2 + 3\alpha_4 \lambda + \alpha_5}{b\lambda + c} \ .$$

Mais cette quantité μ est toujours positive quand λ est réel; car, en ajoutant les deux rapports, après avoir multiplié les deux termes du premier par λ, on obtient

$$\mu = \frac{\alpha_1\lambda^4 + 4\alpha_2\lambda^3 + 6\alpha_3\lambda^2 + 4\alpha_4\lambda + \alpha_5}{a\lambda^2 + 2b\lambda + c}$$

qui est manifestement positif. On a alors $q'' = -\mu q$ et, pour chacune des oscillations correspondantes, τ varie en raison inverse de q_0.

On peut remarquer que l'intégration des équations approchées du mouvement se ramène à celle d'une équation du second ordre où figure une constante arbitraire, suivie d'une quadrature.

En effet, en modifiant les cinq coefficients α_i on peut toujours supposer $a = c = 1$, $b = 0$.

Les équations du mouvement

$$p'' = -\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \qquad q'' = -\frac{\partial\varphi}{\partial q}$$

admettent l'intégrale des forces vives

$$p'^2 + q'^2 = -\varphi + 2h.$$

On a

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p'}{q'}, \qquad \frac{1}{q'}\frac{d}{dt}\frac{p'}{q'} = \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{p''q' - q''p'}{q'^3}.$$

D'après la première de ces équations, celle des forces vives donne

$$q'^2 = \frac{-\varphi + 2h}{1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2};$$

comme

$$p'' = -\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \qquad q'' = -\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

$$\frac{d^2p}{dq^2} = \frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{dp}{dq}}{q'^2} = \frac{\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{dp}{dq}\right]\left[1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2\right]}{-\varphi + 2h},$$

équation du second ordre donnant p en q,

$$p = f(q).$$

L'intégrale des forces vives devient alors

$$[1 + f'^2(q)]\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = -\varphi[f(q), q] + 2h$$

ce qui donne t en q par une quadrature.

Si, en général, on suppose que p et q s'annulent en même temps, on a

$$p = \lambda q + \lambda' q^2 + \dots$$

et, en négligeant q^2, q^3, ..., $p = \lambda q$; on retrouve ainsi les solutions indiquées.

Si l'on suppose $a = c = 1$, $b = 0$, $\alpha_4 = 0$, l'équation en λ est, après suppression du facteur λ,

$$\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + \alpha_5 = \alpha_1\lambda^2 + 3\alpha_2\lambda + 3\alpha_3 ;$$

elle se réduit au troisième degré et admet toujours une racine réelle.

Si, en outre, $\alpha_2 = 0$, on a une équation quadratique

$$\lambda^2 = \frac{3\alpha_3 - \alpha_5}{3\alpha_3 - \alpha_1} ;$$

pour que λ soit réel, il faut que $3\alpha_3$ soit extérieur à l'intervalle α_1, α_5.

Si $\alpha_1 = \alpha_5$, α_3 est quelconque. Le cas $a = c = 1$, $b = 0$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_5$, se présente dans le mouvement d'un point pesant au voisinage de O, point le plus bas de la surface qui a pour équation, Oz étant vertical ascendant,

$$4z = x^4 + 2\alpha x^2y^2 + y^4 , \qquad \alpha \leqq 1 .$$

Alors

$$2\,\mathrm{T} = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x'^2 + y'^2 + (x^3 + \alpha xy^2)^2 x'^2 + (y^3 + \alpha x^2y)^2 y'^2 ,$$

$$\mathrm{U} = -mgz .$$

Troisième cas, k quelconque. — Les équations approchées du mouvement sont

$$a_{i1}q_1'' + a_{i2}q_2'' + \dots + a_{ik}q_k'' = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} ,$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

Il serait utile de les intégrer. Nous nous bornerons à trouver des solutions où

$$q_1 = \lambda_1 q , \qquad q_2 = \lambda_2 q , \ldots \qquad q_k = \lambda_k q ,$$

les λ_i étant réels, non nuls et q désignant une variable auxiliaire. Si $k = 2$, $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$. On peut toujours supposer

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{kk} = 1 , \qquad a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j .$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 q'' &= - q^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) , \\ \lambda_2 q'' &= - q^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_k q'' &= - q^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) . \end{aligned} \right.$$

En éliminant $q'' : q^3$ on a $k - 1$ équations

$$\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = \ldots = \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}$$

homogènes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. En éliminant $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_k$, on a une équation algébrique en $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ dont sont admissibles seulement les racines réelles ne rendant nulle aucune des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ et rendant positives les quantités

$$\mu = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = \ldots = \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k} .$$

On peut montrer que si les λ_i sont réels, μ est positif. En effet

$$\mu = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2} = \frac{4 \varphi}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2} ,$$

ce qui est positif.

L'intégration des équations approchées du mouvement peut être ramenée à celle de $k - 1$ équations du second ordre avec une constante arbitraire, définissant q_2, q_3,..., q_k en q, suivie d'une quadrature. On a, en effet,

$$\frac{dq_\rho}{dq_1} = \frac{q'_\rho}{q'_1}, \qquad (\rho = 2, 3, \ldots, k)$$

$$\frac{d^2 q_\rho}{dq_1^2} = \frac{q''_\rho q'_1 - q''_1 q'_\rho}{q'^3_1} = \frac{q'_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - q'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho}}{q'^3_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{dq_\rho}{dq_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho}}{q'^2_1}$$

Mais, d'après l'équation des forces vives,

$$q'^2_1 \left[1 + \left(\frac{dq_2}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dq_3}{dq_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dq_k}{dq_1}\right)^2\right] = -\varphi + 2h$$

on a q'^2_1; alors

$$\frac{d^2 q_\rho}{dq_1^2} = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{dq_\rho}{dq_1} - \frac{d\varphi}{dq_\rho}\right)\left[1 + \left(\frac{dq_2}{dq_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dq_k}{dq_1}\right)^2\right]}{-\varphi + 2h},$$

$$(\rho = 2, 3, \ldots, k).$$

Ces équations donnent

$$q_2 = f_2(q_1), \qquad q_3 = f_3(q_1), \ldots, \qquad q_k = f_k(q_1).$$

Puis, l'intégrale des forces vives

$$\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \left[1 + f'^2_2(q_1) + f'^2_3(q_1) + \ldots + f'^2_k(q_1)\right]$$
$$= -\varphi\left[q_1, f_2(q_1), \ldots, f_k(q_1)\right] + 2h$$

donne t en q_1 par une quadrature.

Si l'on suppose que q_1, q_2, ..., q_k s'annulent en même temps, on a

$$q_1 = \lambda_1 q + \lambda'_1 q^2 + \ldots,$$
$$q_2 = \lambda_2 q + \lambda'_2 q^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_k = \lambda_k q + \lambda'_k q^2 + \ldots;$$

en se bornant aux premiers termes,

$$q_1 = \lambda_1 q, \qquad q_2 = \lambda_2 q, \ldots, \qquad q_k = \lambda_k q.$$